Programm,

womit

zu der auf Dienstag, den 29. März 1836 angesetzten öffentlichen Prüfung der Zöglinge

des

städtischen Gymnasiums zu Danzig

ergebenst einladet

Dr. Friedr. Wilh. Engelhardt,
Director.

Inhalt:

Danzig, 1836.
Gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

Ueber

die Auflösung

quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen,

besonders

mittelst goniometrischer Functionen.

Von

W. A. FÖRSTEMANN,

Professor am Gymnasium zu Danzig.

Danzig,

in Commission bei S. Anhuth.

1836.

Ueber die Auflösung quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen mittelst goniometrischer Functionen.

In den folgenden Blättern soll zunächst versucht werden, das in obiger Ueberschrift angegebene Thema so zu behandeln, dass die Einführung der Hülfswinkel, und überhaupt die Ableitung der Rechnungsregeln, so einfach als möglich geschehe. Ferner soll eine einfache Anwendung der Hülfswinkel zur Auflösung kubischer Gleichungen nicht bloss für den sogenannten irreductibeln Fall, sondern auch für diejenigen Fälle, wo die Wurzeln imaginär sind, so wie auch eine auf ähnliche Art vollständige Behandlung biquadratischer Gleichungen gezeigt werden. Endlich wird auch der Fall imaginärer Coefficienten der Gleichungen nicht ganz unberücksichtigt bleiben.

§. 1.

Erste Aufgabe. Die reine Gleichung des nten Grades

$$(1) \qquad x^n = a + bi,$$

wo i eine der imaginären Quadratwurzeln aus -1 bedeutet, aufzulösen.

Auflösung. Man setze $a + bi = r.(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)$, wo r eine positive Zahl bedeute. Damit diese Annahme Statt finde, muss sein

$$a = r.\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Diese Bedingungen können immer durch Annahme eines Winkels φ zwischen den Grenzen 0^0 und 360^0 erfüllt werden; da aber r positiv sein soll, so muss $\cos\varphi$ mit a, $\sin\varphi$ mit b im Vorzeichen übereinstimmen, und hieraus entscheidet sich leicht, ob φ ein Winkel zwischen 0 und 90, 90 und 180, 180 und 270, oder 270 und 360 Grad sein müsse. Die Gleichungen zur numerischen Bestimmung von φ und r sind aber

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \qquad\qquad (3) \qquad r = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Man nehme nun an, ein die Gleichung (1) lösender Werth von x sei durch die Gleichung bestimmt

$$x = \varrho \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha\, i)$$

wo auch ϱ positiv sei, so hat man bekanntlich

$$x^n = \varrho^n \cdot (\cos n\alpha + \sin n\alpha\, i).$$

Folglich muss sein
$$r \cdot \cos\varphi = \varrho^n \cdot \cos n a$$
$$r \cdot \sin\varphi = \varrho^n \cdot \sin n\alpha.$$

Durch Quadrirung und Addition entstehet hieraus

$$r^2 = (\varrho^n)^2, \qquad \text{also } \varrho = \sqrt[n]{r}.$$

Ferner folgt $\quad \cos\varphi = \cos n\alpha, \qquad \sin\varphi = \sin n\alpha,$

welche Gleichungen nicht bloss richtig werden, wenn man setzt $n\alpha = \varphi$, sondern auch, wenn man annimmt

$$n\alpha = \varphi + 4k \cdot 90^0, \qquad \text{und also } \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{4k}{n} \cdot 90^0,$$

wo k irgend eine ganze Zahl sein darf.

Die n verschiedenen Werthe des x gehen nun aus der Gleichung

$$(4) \qquad x = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{4k}{n} \cdot 90^0\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{4k}{n} \cdot 90^0\right) i \right]$$

hervor, wenn man für k nach der Reihe jeden der Werthe 0, 1, 2, ... (n—1) setzt.

Die Rechnungsvorschrift liegt in den Gleichungen (2) (3) (4).

Anmerkung. Wegen späterer Anwendungen bemerke man hier noch Folgendes.

1) Für den Fall, dass $n = 2$, hat x die zwei Werthe

$$x_1 = \sqrt{r} \cdot \left[\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} i \right]$$

$$x_2 = \sqrt{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right) i \right],$$

oder einfacher
$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} i \right).$$

2) Ist $n = 3$, so hat x die drei Werthe

$$x_1 = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3} i \right]$$

$$x_2 = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right) i \right]$$

$$x_3 = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right) i \right].$$

Man kann hier aber auch setzen

$$x_2 = x_1 \,.\, (\cos 120^0 + \sin 120^0\, i) = x_1 \,.\, (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$$

$$x_3 = x_1 \,.\, (\cos 240^0 + \sin 240^0\, i) = x_1 \,.\, (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i).$$

Dieses gilt auch für den Fall, dass $b = 0$, wo also x die drei Kubikwurzeln aus der reellen Zahl a darstellt. Hier ist $\varphi = 0^0$, $r = a$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = x_1 \,.\, (-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i)$.

3) Durch Auflösung der Gleichung $x^n = a + bi$ hat man auch zugleich die $x^n = a - bi$ gelöset. Denn ist ein Werth von x für jene Gleichung $= m + ni$, so ist ein Werth von x für die letztre $= m - ni$. So braucht man nur die Vorzeichen der imaginären Theile in den Wurzeln jener Gleichung in die entgegengesetzten zu verwandeln, um die Wurzeln der letztern zu erhalten.

§. 2.

Zweite Aufgabe. Man soll die Unbekannten x_1 und x_2 aus den Gleichungen

$$(1) \qquad x_1 + x_2 = s,$$

$$(2) \qquad x_1 x_2 = p,$$

für den Fall, dass s und p reelle Werthe sind, mittelst goniometrischer Functionen berechnen.

Bemerkung. Diese Aufgabe wird hier nur desswegen behandelt, weil ihre Auflösung zur Auflösung der weiter folgenden Aufgaben wesentliche Dienste leistet. Man kann die Herleitung der Regeln zwar auf die algebraische Auflösungsformel

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \,.\, (s \pm \sqrt{s^2 - 4p})$$

gründen, jedoch ist folgende Behandlung (welche der Vf. übrigens schon im 2ten Theile seines Lehrbuchs der Geometrie gezeigt hat) einfacher und mehr direct.

Auflösung. Man unterscheide die beiden Fälle eines positiven und eines negativen Products der Unbekannten.

Erster Fall. p sei positiv.

Man nehme an $\quad x_1 = \frac{f}{tg\varphi}, \qquad x_2 = f \,.\, tg\varphi,$

so handelt es sich darum, die Hülfszahl f und den Hülfswinkel φ so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (1) und (2) genügen. Man findet zuvörderst aus (2)

$$x_1\, x_2 = f^2 = p.$$

Hiernach ist eigentlich $f = \pm \sqrt{p}$, allein es genügt, der Hülfszahl f nur den positiven Werth zu geben, und zu nehmen

$$f = \sqrt{p}.$$

Setzt man nun $x_1 = \frac{\sqrt{p}}{tg\varphi}$, $x_2 = \sqrt{p} \,.\, tg\varphi$ in (1), so kommt

$$\sqrt{p} \,.\, (\frac{1}{tg\varphi} + tg\varphi) = s, \quad \text{also} \quad \frac{1}{tg\varphi} + tg\varphi = \frac{s}{\sqrt{p}}.$$

Es ist aber $\frac{1}{tg\varphi} + tg\varphi = \frac{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}$, mithin hat man

$$\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{p}}{s}.$$

Die Rechnungsvorschrift wird also durch die Formeln gegeben

$$[1] \quad \sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{p}}{s}, \qquad [2] \quad x_1 = \frac{\sqrt{p}}{tg\varphi}, \quad x_2 = \sqrt{p} \,.\, tg\varphi.$$

Ist s positiv, so findet sich auch $\sin 2\varphi$ positiv, und man hat für 2φ einen Winkel zwischen 0^0 und 180^0 anzunehmen. Dadurch fällt φ zwischen 0^0 und 90^0 und beide Unbekannte werden positiv. Es ist aber gleichgültig, ob man für 2φ einen spitzen oder stumpfen Winkel annimmt; aus dem einen entstehet für $\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\}$ derselbe Werth, wie aus dem andern für $\left\{ \begin{matrix} x_2 \\ x_1 \end{matrix} \right\}$. — Ist dagegen s und folglich auch $\sin 2\varphi$ negativ, so liegt 2φ zwischen 180^0 und 360^0, φ wird ein stumpfer Winkel, und beide Unbekannte werden negativ. Auch hier ist es gleichgültig, ob man 2φ zwischen 180^0 und 270^0 oder zwischen 270^0 und 360^0 nimmt.

Anmerkung 1. Man hätte auch setzen können $x_1 = F\cos\varphi^2$, $x_2 = F\sin\varphi^2$, dann würde man aus (1) und (2) erhalten

$$F = s, \qquad \sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{p}}{s},$$

und hätte also nach den Gleichungen zu rechnen

$$[1'] \quad \sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{p}}{s} \qquad [2'] \quad x_1 = s \,.\, \cos\varphi^2, \quad x_2 = s \,.\, \sin\varphi^2.$$

Hier stimmt [1'] mit [1] überein; es ergiebt sich aber [2'] auch, indem man aus [1] folgert $\sqrt{p} = s \,.\, \sin\varphi \cos\varphi$, und diesen Werth in [2] substituirt.

Anmerkung 2. Ist s^2 kleiner als 4p, so wird in [1] $\sin 2\varphi$ grösser als 1, und es kann kein Winkel 2φ angegeben werden, der dieser Gleichung Genüge leistete. Hier giebt aber die algebraische Behandlung

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (s \pm \sqrt{4p - s^2} \,.\, i)$$

und es kann keine erhebliche Anwendung goniometrischer Functionen zur Erleichterung der Rechnung Statt finden. Doch würde man hier, zur Auflösung von (1) und (2), setzen können

$$x_1 = f \,.\, (\cos\varphi + \sin\varphi i), \qquad x_2 = f \,.\, (\cos\varphi - \sin\varphi i),$$

und würde (da $(\cos\varphi + \sin\varphi i) \times (\cos\varphi - \sin\varphi i) = 1$) erhalten

$$f = \sqrt{p}, \qquad \cos\varphi = \frac{s}{2\sqrt{p}}.$$

Zweiter Fall. p sei negativ.

Hier setze man $x_1 = \frac{f}{tg\varphi}$, $x_2 = -f.tg\varphi$,

so folgt aus (2): $f = \sqrt{-p}$,

welcher Werth keineswegs imaginär ist; dann aus (1):

$$\sqrt{-p}.(\frac{1}{tg\varphi} - tg\varphi) = s, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{tg\varphi} - tg\varphi = \frac{s}{\sqrt{-p}}.$$

Es ist aber $\frac{1}{tg\varphi} - tg\varphi = \frac{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2}{\sin\varphi . \cos\varphi} = \frac{2\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{2}{tg 2\varphi}$;

hieraus entspringt die Rechnungsvorschrift:

$$[1] \quad tg 2\varphi = \frac{2\sqrt{-p}}{s}, \quad [2] \quad x_1 = \frac{\sqrt{-p}}{tg\varphi}, \quad x_2 = -\sqrt{-p}\ tg\varphi.$$

Ist s positiv, so kann man 2φ zwischen 0^0 und 90^0, φ zwischen 0^0 und 45^0 nehmen; dann wird x_1 positiv, x_2 negativ, und x_1 grösser als x_2. Ist s negativ, so darf man 2φ zwischen 90^0 und 180^0 nehmen, woraus ein positives x_1, ein negatives x_2, und dieses, absolut genommen, grösser als jenes hervorgehet.

Anmerkung 3. Die Annahme $x_1 = F\cos\varphi^2$, $x_2 = -F\sin\varphi^2$ führt zu der weniger bequemen Vorschrift

$$[1'] \quad tg 2\varphi = \frac{2\sqrt{-p}}{s}, \quad [2'] \quad x_1 = \frac{s\cos\varphi^2}{\cos 2\varphi}, \quad x_2 = \frac{-s\sin\varphi^2}{\cos 2\varphi}.$$

Beispiele. 1) Es sei $s = 93,7062$, $p = 1981,74$,
so kommt $2\varphi = 71^0\,57'\,44'',6$, $x_1 = 61,3607$, $x_2 = 32,3454$.

2) Es sei $s = 504,67$, $p = -236489$,
so kommt $2\varphi = 62^0\,34'\,33''$, $x_1 = 800,205$, $x_2 = -295,535$.

Besondre Fälle. 1) Ist $p = 0$, so findet man algebraisch eine Unbekannte $= s$, die andre $= 0$. Zu diesem Resultate führen auch die Formeln [1'] und [2'], sowohl die für ein positives, als die für ein negatives p aufgestellten.

2) Ist $s = 0$, so hat man den Fall eines negativen und den eines positiven p zu unterscheiden. Bei negativem p gelten die Formeln [1] und [2] des zweiten Falles; es wird $tg 2\varphi$ unendlich, $2\varphi = 90^0$, $x_1 = \sqrt{-p}$, $x_2 = -\sqrt{-p}$. Bei positivem p hat man $x_1 = \sqrt{p}.i$, $x_2 = -\sqrt{p}.i$.

§. 3.

Dritte Aufgabe. Die quadratische Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

worin A und B reell seien, durch goniometrische Functionen zu lösen.

Auflösung. Es ist zur Einführung eines Hülfswinkels nicht nöthig, die Gleichung algebraisch aufzulösen, sondern man kann diese Aufgabe (wie vom Vf. auch schon im 2ten Theile seines Lehrbuchs der Geometrie geschehen) ganz einfach auf die vorhergehende zurückführen. Bezeichnet man nämlich die beiden gesuchten Werthe von x mit x_1 und x_2, so hat man bekanntlich

$$(1) \quad x_1 + x_2 = -A,$$
$$(2) \quad x_1 x_2 = B,$$

und findet nun unmittelbar aus §. 2., indem man die dortigen Buchstaben s und p in $-A$ und B verwandelt, die Vorschrift:

Erster Fall. Wenn B positiv, so ist nach den Gleichungen zu rechnen

$$[1] \ \sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{B}}{A}, \qquad [2] \ x_1 = \frac{\sqrt{B}}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad x_2 = \sqrt{B} \,.\, \operatorname{tg}\varphi.$$

Wenn jedoch A kleiner als $2\sqrt{B}$, so hat man $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{B-\left(\frac{A}{2}\right)^2}\,.\,i.$

Zweiter Fall. Wenn B negativ, so gelten die Gleichungen:

$$[1] \ \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{-B}}{A}, \quad [2] \ x_1 = \frac{\sqrt{-B}}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad x_2 = -\sqrt{-B} \,.\, \operatorname{tg}\varphi.$$

Besondre Fälle. 1) Wenn $B = 0$, so hat man $x_1 = -A$, $x_2 = 0$. 2) Wenn $A = 0$, so kommt, im Fall eines negativen B, $x_1 = \sqrt{-B}$, $x_2 = -\sqrt{-B}$, im Fall eines positiven aber $x_1 = \sqrt{B}\,.\,i$, $x_2 = -\sqrt{B}\,.\,i$.

§. 4.

Vierte Aufgabe. Die quadratische Gleichung mit imaginären Coefficienten

$$x^2 + (a + bi)\,x + (c + di) = 0$$

aufzulösen.

Auflösung. Die gewöhnliche algebraische Behandlung giebt

$$x = \frac{1}{2}\left[-(a+bi) \pm \sqrt{(a^2 - b^2 - 4c) + (2ab - 4d)\,i}\right].$$

Die hier geforderte Quadratwurzel-Ausziehung aus einem imaginären Binomium der Form $A + Bi$ kann aber nach doppelter Methode geschehen.

Erste Methode. (Vergl. des Vf. Arithmetisches Uebungsbuch S. 245). Es ist

$$\sqrt{A + Bi} = \pm\left(P + \frac{B}{2P}\,i\right)$$

wenn

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}}.$$

Dieses führt zu der Regel: Man berechne

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 - 4c)^2 + (2ab - 4d)^2} + (a^2 - b^2 - 4c)}{2}}$$

so ist $$x = \frac{1}{2}.\left[-(a+bi) \pm (P + \frac{ab-2d}{P}i)\right]$$

oder $$x_1 = \frac{1}{2}.\left[(-a+P) + (-b + \frac{ab-2d}{P}i)\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{2}.\left[(-a-P) + (-b - \frac{ab-2d}{P}i)\right].$$

Zweite Methode. Die Quadratwurzel aus $(a^2 - b^2 - 4c) + (2ab - 4d)i$ ausziehen heisst soviel, wie die Werthe von y aus

$$y^2 = (a^2 - b^2 - 4c) + (2ab - 4d)i$$

bestimmen. Dieses kann aber nach §. 1. mittelst goniometrischer Functionen geschehen. Man bekommt die Regel: Es sei

$$[1]\quad tg\varphi = \frac{2ab-4d}{a^2-b^2-4c}, \qquad [2]\quad r = \frac{a^2-b^2-4c}{\cos\varphi} = \frac{2ab-4d}{\sin\varphi}.$$

Dann ist $$x = \frac{1}{2}\left[-(a+bi) \pm \sqrt{r}.(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}i)\right]$$

oder [3] $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left[(-a + \sqrt{r}.\cos\frac{\varphi}{2}) + (-b + \sqrt{r}.\sin\frac{\varphi}{2})i\right] \\ x_2 = \frac{1}{2}\left[(-a - \sqrt{r}.\cos\frac{\varphi}{2}) + (-b - \sqrt{r}.\sin\frac{\varphi}{2})i\right]. \end{cases}$$

Beispiel 1. Es werde die Gleichung gelöset, welche Cauchy in seinen Exercices T. 4. p. 83. behandelt, nämlich

$$x^2 - (5 + 4i)x + (6 + 8i) = 0.$$

Bei der ersten Methode kommt

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{(-15)^2 + 8^2} - 15}{2}} = 1, \qquad \frac{ab-2d}{P} = 4,$$

daher $$x_1 = \frac{1}{2}\left[(5+1) + (4+4)i\right] = 3 + 4i,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[(5-1) + (4-4)i\right] = 2.$$

Nach der zweiten Methode hat man

$$r\cos\varphi = -15, \qquad r\sin\varphi = 8, \qquad tg\varphi = -\frac{8}{15},$$

und $\cos\varphi$ muss negativ, $\sin\varphi$ positiv, also φ ein Winkel zwischen 90° und 180° sein. Die Bestimmung dieses Winkels lässt sich aber ersparen. Aus dem bekannten Werthe der Tangente findet man nämlich

$$\cos\varphi = -\frac{15}{17}, \qquad \sin\varphi = \frac{8}{17},$$

dann $$r = \frac{-15}{\cos\varphi} = \frac{8}{\sin\varphi} = 17.$$

Weiter folgt $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$, $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$,

folglich $\sqrt{r}\,.\cos\frac{\varphi}{2} = 1$, $\sqrt{r}\,.\sin\frac{\varphi}{2} = 4$,

und nun finden sich für x_1 und x_2 dieselben Werthe wie oben.

Beispiel 2. Die Gleichung zu lösen

$$x^2 + (5 + 2i)x + (3 + i) = 0.$$

Nach der zweiten Methode kommt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{16}{9}, \quad \varphi = 60^0\,38'32'', \quad \log r = 1,2638149,$$

$$\sqrt{r}\,.\cos\frac{\varphi}{2} = 3,69848, \quad \sqrt{r}\,.\sin\frac{\varphi}{2} = 2,16305,$$

$$x_1 = -0,65076 + 0,08152\,i$$
$$x_2 = -4,34924 - 2,08152\,i.$$

§. 5.

Fünfte Aufgabe. Die kubische Gleichung

$$(1) \qquad x^3 = bx + c,$$

wo b und c reell seien, durch goniometrische Functionen zu lösen.

Auflösung. Man setze (2) $x = u + v$,

so kommt (3) $(u+v)^3 - b(u+v) - c = 0$

oder (4) $u^3 + v^3 - c + (3uv - b)(u+v) = 0$.

Diese Gleichung kann unter andern dadurch richtig werden, dass man setzt, es sei

$$(5) \qquad u^3 + v^3 - c = 0$$

und $(3uv - b)(u + v) = 0$,

oder vielmehr, weil der Factor $u + v$, als $= x$, nicht $= 0$ gesetzt werden darf,

$$(6) \qquad 3uv - b = 0.$$

Werden nun die Unbekannten u und v so bestimmt, dass sie den Gleichungen (5) und (6) Genüge leisten, so wird auch (3) und daher auch (1) richtig, wenn man $x = u + v$ setzt. So kommt es nur darauf an, u und v aus (5) und (6) zu bestimmen, dann wird $x = u + v$ sein. Wir verwandeln aber diese Gleichungen in

$$(7) \qquad u^3 + v^3 = c$$

$$(8) \qquad uv = \frac{b}{3}.$$

Aus diesen Gleichungen würde sich die Cardanische Formel ergeben; wir bedürfen aber derselben nicht zur Einführung goniometrischer Functionen; denn da aus (8) folgt

$$(9) \qquad u^3v^3 = \left(\frac{b}{3}\right)^3,$$

so kann u^3 und v^3 aus c und $\left(\frac{b}{3}\right)^3$ so bestimmt werden, wie im §. 2. x_1 und x_2 aus s und p. Dann werden aus u^3 sich durch Ausziehung der Kubikwurzel drei verschiedene Werthe von u, und eben so aus v^3 sich drei verschiedene Werthe von v ergeben. Diese drei Werthe von u werden aber mit den drei Werthen von v paarweise so zusammengehören, dass immer $uv = \frac{b}{3}$. Bezeichnet man nun die drei Werthe von u mit u_1, u_2, u_3 und die von v, wie sie mit ihnen der Reihe nach zusammengehören, mit v_1, v_2, v_3, so gehen für x folgende drei Werthe hervor

$$x_1 = u_1 + v_1, \qquad x_2 = u_2 + v_2, \qquad x_3 = u_3 + v_3.$$

Bei Bestimmung von u_3 und v_3 nach der Methode von §. 2., hat man nun verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Wenn $\left(\frac{b}{3}\right)^3$ oder also auch b positiv, so hat man zu setzen

$$\sin 2\varphi = \frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Diese Formel giebt nur dann einen wirklichen Hülfswinkel, wenn $\frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ nicht grösser als 1. Dann ist aber weiter

$$u^3 = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad v^3 = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3} \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

und hieraus erhält jede Unbekannte einen reellen Werth und zwei imaginäre. Der reelle Werth von u ist $= \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}}$, der reelle von $v = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}$. Diese beiden Werthe geben ein reelles Product und genügen der Bedingung, dass $uv = \frac{b}{3}$, sie gehören folglich zusammen, so dass wir setzen dürfen

$$u_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}}. \qquad v_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Die imaginären Werthe von u sind

der eine $= u_1 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$, der andere $= u_1 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} i)$;

und die imaginären Werthe von v

der eine $= v_1 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$, der andere $= v_1 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$.

Da aber $uv = \frac{b}{3}$ sein soll, so findet sich, es gehöre

mit $u_2 = u_1 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$ zusammen $v_2 = v_1 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$

und mit $u_3 = u_1 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$ ..... $v_3 = v_1 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$.

Es ist folglich

$$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi} \right)$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3}\,.\,i$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3}\, i\,.$$

Zur Erleichterung der Rechnung führe man noch einen Hülfswinkel ω ein, und setze

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\omega$$

so wird
$$u_1 + v_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left(\frac{\cos\omega}{\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \right) = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \frac{2}{\sin 2\omega}$$

$$u_1 - v_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left(\frac{\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \right) = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} 2\omega}$$

so dass endlich
$$x_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \frac{2}{\sin 2\omega},$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg} 2\omega}\, i,$$

$$x_3 = -\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg} 2\omega}\, i\,.$$

Dem in der 2ten Anmerkung zu §. 2. betrachteten Falle entspricht hier der, wo $\frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ grösser als 1. Setzen wir hier

$$u^3 = f.(\cos\psi + \sin\psi\, i), \qquad v^3 = f.(\cos\psi - \sin\psi\, i)$$

so entwickelt sich aus (7) und (9)

$$2 f \cos\psi = c, \qquad f^2 = \left(\frac{b}{3}\right)^3,$$

woher
$$\cos\psi = \frac{c}{2\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

$$u^3 = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}.\ (\cos\psi + \sin\psi\, i)$$

$$v^3 = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}.\ (\cos\psi - \sin\psi\, i)\,.$$

Aus u^3 entstehen nun für u die drei Werthe

$$u_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left[\cos\frac{\psi}{3} + \sin\frac{\psi}{3}\, i \right]$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\psi}{3} + 120^0\right) + \sin\left(\frac{\psi}{3} + 120^0\right) i \right]$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\psi}{3} + 240^0\right) + \sin\left(\frac{\psi}{3} + 240^0\right) i \right],$$

von denen sich die drei Werthe des v nur durch das Minuszeichen vor dem imaginären Theile unterscheiden. Vermöge $uv = \frac{b}{3}$ gehören aber mit diesen Werthen von u die folgenden Werthe von v der Reihe nach zusammen

$$v_1 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left[\cos\frac{\psi}{3} - \sin\frac{\psi}{3}\, i\right]$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\psi}{3} + 120^0\right) - \sin\left(\frac{\psi}{3} + 120^0\right) i\right]$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\psi}{3} + 240^0\right) - \sin\left(\frac{\psi}{3} + 240^0\right) i\right],$$

und nun folgt, durch Aufheben der imaginären Theile,

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \cos\frac{\psi}{3},$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{3} + 120^0\right)$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt{\frac{b}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{3} + 240^0\right),$$

dieselben Formeln, zu denen auch die bekannte, auf die Gleichung $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$ gestützte Herleitung führt.

Anmerkung 1. In dem besondern Falle, dass $\frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3} = 1$ (bei positivem c) oder $= -1$ (bei negativem c), lassen sich sowohl die Formeln mit den Hülfswinkeln φ, ω als die mit ψ anwenden. Man erhält 1) bei positivem c für x die drei Werthe $2\sqrt{\frac{b}{3}}$, $-\sqrt{\frac{b}{3}}$, $-\sqrt{\frac{b}{3}}$, und 2) bei negativem c die Werthe $-2\sqrt{\frac{b}{3}}$, $\sqrt{\frac{b}{3}}$, $\sqrt{\frac{b}{3}}$, so dass immer zwei Werthe einander gleich sind.

Zweiter Fall. Wenn $\left(\frac{b}{3}\right)^3$ oder auch b negativ ist, so setze man

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{c}{2}\sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)^3},$$

dann ist

$$u^3 = \frac{\sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)^3}}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad v^3 = -\sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)^3} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Für u entstehen sodann die drei Werthe

$$u_1 = \frac{\sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}}, \qquad u_2 = u_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right), \qquad u_3 = u_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right),$$

und die ähnlich geformten Werthe des v, so wie sie jenen, der Bedingungsgleichung $uv = \frac{b}{3}$ gemäss, entsprechen, sind folgende

$$v_1 = -\sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad v_2 = v_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \qquad v_3 = v_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Nun kommt

$$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}\right)$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}\,.\,i$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}\;i..$$

Zur Erleichterung der Rechnung sei

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\omega,$$

so wird

$$u_1 + v_1 = \sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)} \cdot \left(\frac{\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\cos\omega}\right) = \sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg}2\omega},$$

$$u_1 - v_1 = \sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)} \cdot \left(\frac{\cos\omega}{\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\cos\omega}\right) = \sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)} \cdot \frac{2}{\sin 2\omega},$$

$$\frac{u_2 - v_1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{-b}}{\sin 2\omega};$$

daher endlich

$$x_1 = \sqrt{\left(-\frac{b}{3}\right)} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg}2\omega},$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{-b}}{\sin 2\omega}i$$

$$x_3 = -\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{-b}}{\sin 2\omega}i.$$

Jetzt mögen die Rechnungsregeln in eine Uebersicht zusammengestellt, dabei aber, zur Vereinfachung der Rechnung, noch einige Hülfsbuchstaben eingeführt werden.

I. Es sei b eine **positive** Zahl.

Hier berechne man zuerst

$$1) \quad M = \sqrt{\frac{b}{3}}, \qquad 2) \quad N = M^3.$$

Nun untersuche man, ob $\pm c$ grösser oder kleiner als $2N$, oder ob diese Werthe einander gleich, (was sich auch leicht an den Logarithmen entscheidet), und unterscheide hiernach wieder drei Fälle, nämlich

A. Wenn $\pm c$ grösser als $2N$, rechne man so weiter:

$$3) \quad \sin 2\varphi = \frac{2N}{c}, \qquad 4) \quad \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi},$$

$$5) \quad x_1 = \frac{2M}{\sin 2\omega}, \quad x_2 = -\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}2\omega}i, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}2\varphi}i.$$

B. Wenn $\pm c$ kleiner ist als $2N$, rechne man so fort:

3) $\cos\psi = \frac{c}{2N}$,

4) $x_1 = 2M.\cos\frac{\psi}{3}$, $x_2 = 2M.\cos(\frac{\psi}{3} + 120^0)$, $x_3 = 2M\cos(\frac{\psi}{3} + 240^0)$.

C. Wenn endlich $\pm c = 2N$ hat x die drei Werthe

$2\sqrt{\frac{b}{3}}$, $-\sqrt{\frac{b}{3}}$, $-\sqrt{\frac{b}{3}}$; oder $-2\sqrt{\frac{b}{3}}$, $\sqrt{\frac{b}{3}}$, $\sqrt{\frac{b}{3}}$,

je nachdem c positiv, oder negativ.

II. Es sei b eine negative Zahl.

Hier rechne man nach den Formeln

1) $M = \sqrt{(-\frac{b}{3})}$, 2) $N = M^3$,

3) $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2N}{c}$, 4) $\operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}$,

5) $x_1 = \frac{2M}{\operatorname{tg} 2\omega}$, $x_2 = -\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{-b}}{\sin 2\omega} i$, $x_3 = -\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{-b}}{\sin 2\omega} i$.

Beispiel 1. Die Gleichung $x^3 = 11x + 20$ zu lösen.

Wegen des positiven b ist nach I. zu rechnen. Man findet

1) $\log M = 0,28213$, 2) $\log N = 0,84640$.

Es ist $c = 20$ grösser als $2N$, daher nach A weiter zu rechnen.

3) $\log\sin 2\varphi = 9,84640$, $2\varphi = 44^0 35' 50''$.

4) $\log\operatorname{tg}\omega = 9,87096$, $\omega = 36^0 36' 38''$.

5) $x_1 = 4$, $x_2 = -2 + i$, $x_3 = -2 - i$.

Beispiel 2. Die Gleichung $x^3 = 2x + 5$ zu lösen.

Die Rechnung geschiehet nach I. A.

1) $\log M = 9,9119548$, 2) $\log N = 9,7358645$.

3) $\log\sin 2\varphi = 9,3379245$, $2\varphi = 12^0 34' 33'', 3$.

4) $\log\operatorname{tg}\omega = 9,6807119$, $\omega = 25^0 36' 49'', 6$.

5) $x_1 = 2,09455$, $\left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\} = -1,04727 \pm 1,13594 i$.

Cauchy findet in seinen Exercices T. 4. p. 123. die reelle Wurzel $= 2,0945514$.

Beispiel 3. Die Gleichung $x^3 = 8x + 5$ zu lösen. Nach I. B kommt

1) $\log M = 0,2129843$, 2) $\log N = 0,6389530$.

3) $\log\cos\psi = 9,7589870$, $\psi = 54^0 57' 48'', 3$.

4) $x_1 = 3,10043$, $x_2 = -2,43931$, $x_3 = -0,66112$.

Beispiel 4. Die Gleichung $x^3 = 2100x - 24000$ zu lösen.

Nach I. B. kommt

1) $\log M = 1,4225490$, 2) $\log N = 4,2676470$.

3) $\log(-\cos\psi) = 9,8115342$, $\psi = 130^0\,23'\,11''$.

4) $x_1 = 38,40726$, $x_2 = -50,72602$, $x_3 = 12,31875$.

Vergl. Klügels Wörterbuch Th. I. S. 153.

Beispiel 5 u. 6. Die Gleichungen $x^3 = 75x + 250$ und $x^3 = 75x - 250$ zu lösen.

Es kommt I. C. zur Anwendung. In der ersten Gleichung hat x die Werthe 10, —5, —5, in der zweiten die entgegengesetzten.

Beispiel 7. Die Gleichung $x^3 = -2x + 5$ zu lösen.

Es ist nach II. zu rechnen. Dabei kommt

1) $\log M = 9,9119543$, 2) $\log N = 9,7358630$,

3) $\log \mathrm{tg}\, 2\varphi = 9,3379230$, $2\varphi = 12^0\,17'\,0'',36$,

4) $\log \mathrm{tg}\, \omega = 9,6772783$, $\omega = 25^0\,26'\,15'',46$.

5) $x_1 = 1,32827$, $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -0,66413 \pm 1,822972\,i$.

Beispiel 8. Die Gleichung $x^3 = -12x - 63$ zu lösen.

Nach II. folgt

1) $M = 2$, 2) $N = 8$, 3) $\mathrm{tg}\,2\varphi = -\frac{16}{63}$, $\mathrm{tg}\,\varphi = 8$.

4) $\mathrm{tg}\,\omega = 2$, $\mathrm{tg}\,2\omega = -\frac{4}{3}$, $\sin 2\omega = \frac{4}{5}$,

5) $x_1 = -3$, $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{3}\,.\,i$.

Anmerkung 2. Der Vf. glaubt, die von ihm oben für die Fälle I. A. und II. aufgestellten Formeln, in deren Besitze er schon vor zehn Jahren war, seien früher noch nicht bekannt gewesen, wenigstens noch nicht im Druck bekannt geworden. Man hat sich sonst gewöhnlich begnügt, nur die reellen Wurzeln unmittelbar durch Hülfswinkel zu bestimmen; so z. B. Cagnoli, und auch Lambert, der sich dazu der hyperbolischen Functionen bedient. (Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen S. 174.) Zwar hat Gudermann in seiner Theorie der Potenzialfunctionen (Crelle's Journal B. 6. S. 346.) vollständige Formeln mitgetheilt, man wird aber ohne Zweifel seine Formeln, wenn man sie mit obigen vergleicht, wenigstens in praktischer Hinsicht, entbehrlich, ja vielleicht nicht einmal so bequem als die obigen finden.

§. 6.

Sechste Aufgabe. Die kubische Gleichung mit imaginären Coefficienten

$$x_3 = (A + Bi)x + (C + Di)$$

zu lösen.

Auflösung. Die Grundlage der Auflösung im vorigen §. bleibt in voller Kraft. Es kommt auch hier darauf an, u und v aus den Gleichungen

$$u^3 + v^3 = c = C + Di,$$

$$uv = \frac{b}{3} = \frac{A + Bi}{3},$$

zu entwickeln, dann wird x durch Addition der zusammengehörigen Werthe von u und v hervorgehen. Diese Gleichungen führen aber auf imaginäre Ausdrücke für u^3 und v^3, aus denen man dann u und v nach der Methode von §. 1. herleitet. Da die Durchführung dieser Rechnung an den allgemeinen Coefficienten aber zu keiner erheblichen Vereinfachung der Auflösungsformeln führen würde, so werde geradezu ein Beispiel behandelt.

Es sei die Gleichung zu lösen

$$x^3 = (5,1 + 6i)x + (4 + 3i).$$

Hier hat man
$$u^3 + v^3 = 4 + 3i$$
$$uv = 1,7 + 2i.$$

Bei Benutzung der Gleichung $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
hat man
$$(u^3 + v^3)^2 = 7 + 24i,$$
$$4u^3v^3 = -61,948 + 37,36i,$$
$$(u^3 - v^3)^2 = 68,948 - 13,36i.$$

Zur Umwandlung des Binomiums $68,948 - 13,36i$ in die Form $r.(\cos\varphi + \sin\varphi i)$ hat man zu setzen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-13,36}{68,948}, \qquad r = \frac{-13,36}{\sin\varphi} = \frac{68,948}{\cos\varphi}$$

und findet $\varphi = -10^0\,57'\,58'',53, \qquad \log r = 1,8465255.$

Man hat nun $u^3 - v^3 = \sqrt{r}.(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}i),$

der zweite, entgegengesetzte Werth von $u^3 - v^3$ ist nämlich überflüssig, weil derselbe nur zu einer Umtauschung der Werthe von u^3 und v^3 führen würde. Man findet aber

$$\sqrt{r}.\cos\frac{\varphi}{2} = 8,342014, \qquad \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} = -0,800765,$$

daher $u^3 - v^3 = 8,342014 - 0,800765i,$
woher weiter
$$u^3 = 6,171007 + 1,099617i,$$
$$v^3 = -2,171007 + 1,900382i.$$

Das Binomium, welches u^3 bestimmt, kommt in die Form $r'(\cos\varphi' + \sin\varphi' i)$, wenn

$$\log\operatorname{tg}\varphi' = 9,2508855, \qquad \varphi' = 10^0\,6'\,12'',75 \qquad \log r' = 0,7971436.$$

Die drei hieraus für u hervorgehenden Werthe mögen mit u', u'', u''' bezeichnet werden. Sie sind

$$u' = \sqrt[3]{r'}.\cos\frac{\varphi'}{3} + \sqrt[3]{r'}.\sin\frac{\varphi'}{3}i = 1,840618 + 0,108316i,$$

$$u'' = \sqrt[3]{r'}.\cos(\frac{\varphi'}{3} + 120^0) + \sqrt[3]{r'}.\sin(\frac{\varphi'}{3} + 120^0)i = -1,014114 + 1,539865i,$$

$$u''' = \sqrt[3]{r'}.\cos(\frac{\varphi'}{3} + 240^0) + \sqrt[3]{r'}.\sin(\frac{\varphi'}{3} + 240^0)i = -0,826505 - 1,648180i.$$

Das Binomium, welches v^3 darstellt, erhält die Form $r''(\cos\varphi'' + \sin\varphi'' i)$, wenn
$\log(-\mathrm{tg}\,\varphi'') = 9,9421797, \qquad \varphi'' = 138^0\,48'10'',28, \qquad \log r'' = 0,4601849.$
Hieraus entstehen folgende drei Werthe von v:

$$v' = \sqrt[3]{r''}.\cos\frac{\varphi''}{3} + \sqrt[3]{r''}.\sin\frac{\varphi''}{3}\,i = 0,984138 + 1,028677i,$$

$$v'' = \sqrt[3]{r''}.\cos\left(\frac{\varphi''}{3} + 120^0\right) + \sqrt[3]{r''}.\sin\left(\frac{\varphi''}{3} + 120^0\right) i = -1,382929 + 0,337950i,$$

$$v''' = \sqrt[3]{r''}.\cos\left(\frac{\varphi''}{3} + 240^0\right) + \sqrt[3]{r''}.\sin\left(\frac{\varphi''}{3} + 240^0\right) i = 0,398791 - 1,366626i.$$

Vermöge der Bedingung, dass $uv = 1,7 + 2i$, gehört u' mit v', u'' mit v''', u''' mit v'' zusammen, und es ist

$$x_1 = u' + v' = 2,824756 + 1,136993i,$$
$$x_2 = u'' + v''' = -0,615323 + 0,173239i,$$
$$x_3 = u''' + v'' = -2,209434 - 1,310230i.$$

Anmerkung. Nachdem man gefunden, dass u' mit v' zusammengehöre, kann man schon aus folgender Betrachtung wissen, dass u'' mit v''', u''' mit v'' zusammen zu nehmen sei. Es ist

$$u'' = u'.(\cos 120^0 + \sin 120^0\, i), \qquad u''' = u'.(\cos 240^0 + \sin 240^0\, i)$$
$$v'' = v'.(\cos 120^0 + \sin 120^0\, i), \qquad v''' = v'.(\cos 240^0 + \sin 240^0\, i).$$

Es ist aber $(\cos 120^0 + \sin 120^0 i) \times (\cos 240^0 + 240^0 i) = 1$, folglich $u''v''' = u'v'$ und auch $u'''v'' = u'v'$; also wenn $u'v' = 1,7 + 2i$, hat auch jedes der Producte $u''v'''$ und $u'''v''$ diesen Werth.

§. 7.

Siebente Aufgabe. Die vollständige kubische Gleichung zu lösen

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0.$$

Auflösung. Man setze $y = x - \frac{1}{3}A$,

so gehet hervor
$$y^3 = x^3 - Ax^2 + \frac{1}{3}A^2x - \frac{1}{27}A^3$$
$$Ay^2 = Ax^2 - \frac{2}{3}A^2x + \frac{1}{9}A^3$$
$$By = Bx - \frac{1}{3}AB$$
$$C = C$$

daher durch Addition $0 = x^3 - (\frac{1}{3}A^2 - B)x - (-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C)$

oder $x^3 = (\frac{1}{3}A^2 - B)x + (-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C)$.

Setzt man also
$$b = \frac{1}{3}A^2 - B$$
$$c = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C,$$

so kommt man auf die Auflösung einer der in den beiden vorigen §§. behandelten Aufgaben zurück. Hat man die 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3 bestimmt, so ist

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{3}A, \qquad y_2 = x_2 - \frac{1}{3}A, \qquad y_3 = x_3 - \frac{1}{3}A.$$

§. 8.

Achte Aufgabe. Die Gleichung des vierten Grades

$$(1) \qquad x^4 = bx^2 + cx + d$$

aufzulösen.

Auflösung. Man setze (2) $x = u + v + w$,

so ist $x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$.

Nun sei (3) $P = u^2 + v^2 + w^2$

so hat man $x^2 - P = 2(uv + uw + vw)$

und $x^4 - 2Px^2 + P^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$.

Statt dieser Gleichung kann, wenn man in ihr für $u + v + w$ setzt x, und ausserdem annimmt

$$(4) \qquad Q = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2$$

$$(5) \qquad R = u^2v^2w^2$$

geschrieben werden (6) $x^4 = 2Px^2 + 8\sqrt{R}.x + (4Q - P^2)$.

Soll diese Gleichung mit (1) übereinstimmen, so muss sein

$$(7) \qquad 2P = b,$$

$$(8) \qquad 8\sqrt{R} = c,$$

$$(9) \qquad 4Q - P^2 = d,$$

und kann man nun u, v, w so bestimmen, dass diese Gleichungen richtig werden, so wird x durch die Gleichung (2) bestimmt. Aus (7) (8) (9) kommt aber

$$(10) \qquad P = \frac{1}{2}b$$

$$(11) \qquad Q = \frac{1}{4}d + \frac{1}{16}b^2$$

$$(12) \qquad R = \frac{1}{64}c^2,$$

und die Bestimmung von u, v, w aus diesen Werthen von P, Q, R geschiehet folgendermassen. Bekanntlich gilt der Satz: Ist in der kubischen Gleichung

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

der Coefficient $A = -(a + b + c)$, $B = ab + ac + bc$, $C = -abc$, so sind a, b, c die drei Werthe von z aus der kubischen Gleichung. Vermöge dieses Satzes und der Gleichungen (3) (4) (5) sind folglich die drei Grössen u^2, v^2, w^2 die drei Werthe von z aus der kubischen Gleichung

$$(13) \qquad z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0,$$

oder (14) $z^3 - \frac{1}{2}bz^2 + (\frac{1}{4}d + \frac{1}{16}b^2)z - \frac{1}{64}c^2 = 0$.

Hat man die drei Wurzeln dieser Gleichung, nämlich z_1, z_2, z_3 berechnet, so ist also

$$u = \sqrt{z_1}, \qquad v = \sqrt{z_2}, \qquad w = \sqrt{z_3}$$

und sodann sind die Werthe von x in der Form $u + v + w$ oder $\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$ enthalten. Hier bekommt aber jede Quadratwurzel zwei verschiedene Werthe, und somit stellt die Summe $\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$ acht verschiedene Werthe dar. Da aber nach (8) sein soll

$$\sqrt{R} = uvw = \sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = \frac{c}{8},$$

so bestimmt sich zu jeder Combination eines Werthes von $\sqrt{z_1}$ und eines Werthes von $\sqrt{z_2}$ nur ein einziger dazu gehöriger Werth von $\sqrt{z_3}$, und so erhält man für x nur vier verschiedene Werthe, wie es sein muss.

Zur Berechnung von z aus (14) würden im Allgemeinen goniometrische Functionen dienen können; indessen bei einfachen Beispielen, wie die unten zur Erläuterung aufgestellten, wird z oft viel einfacher, zuweilen selbst durch Errathen und Probiren, gefunden werden können.

Die bisherige Behandlung erstreckt sich nicht bloss auf den Fall, wo die Coefficienten b, c, d alle reelle Zahlen, sondern auch auf den, wo sie alle oder zum Theil imaginär sind. Der Fall der reellen Coefficienten soll aber hier noch näher untersucht werden. Für denselben sind aber noch verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich:

Fall I. Die kubische Hülfsgleichung (14) giebt drei reelle Werthe von z, und zwar

A. Diese reellen Werthe sind alle positiv.

Hier sind die Wurzeln $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ alle reell und daher auch alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung reell. Man hat aber weiter zu unterscheiden, ob c positiv oder negativ.

α) Ist c positiv, so müssen die Wurzeln $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ so combinirt werden, dass ihr Product positiv sei, und daher kann man setzen

$$x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \qquad x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \qquad x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

β) Ist dagegen c negativ, so kann man annehmen

$$x_1 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \qquad x_3 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},$$
$$x_2 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \qquad x_4 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}.$$

B. Von diesen reellen Werthen sind zwei, etwa z_2 und z_3 negativ, der dritte z_1 positiv.

Hier wird $\sqrt{z_1}$ reell, $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ aber imaginär. Man setze

$$\sqrt{z_2} = \pm mi, \qquad \sqrt{z_3} = \pm ni,$$

so hat man

α) wenn c positiv

$$x_1 = \sqrt{z_1} + mi - ni = \sqrt{z_1} + (m-n)i, \qquad x_3 = -\sqrt{z_1} + mi + ni = -\sqrt{z_1} + (m+n)i,$$
$$x_2 = \sqrt{z_1} - mi + ni = \sqrt{z_1} - (m-n)i, \qquad x_4 = -\sqrt{z_1} - mi - ni = -\sqrt{z_1} - (m+n)i.$$

β) Wenn c negativ

$$x_1 = -\sqrt{z_1} - mi + ni = -\sqrt{z_1} - (m-n)i, \qquad x_3 = \sqrt{z_1} - mi - ni = \sqrt{z_1} - (m+n)i,$$
$$x_2 = -\sqrt{z_1} + mi - ni = -\sqrt{z_1} + (m-n)i, \qquad x_4 = \sqrt{z_1} + mi + ni = \sqrt{z_1} + (m+n)i.$$

In diesem Falle B. sind also im Allgemeinen alle vier Wurzeln imaginär; in dem besondern Falle jedoch, wo die beiden negativen Wurzeln der kubischen Gleichung einander gleich sind, hat man $m = n$, zwei Werthe von x werden reell und einander gleich, die beiden andern bleiben imaginär.

Fälle, wo eine oder wo alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung negativ wären, können nicht Statt finden, denn dann würde ihr Product negativ sein, während es doch $= \frac{1}{64} c^2$, also positiv, sein muss; oder man kann auch sagen, dann würde das Product $\sqrt{z_1} . \sqrt{z_2} . \sqrt{z_3}$ imaginär werden, während es reell, $= \frac{1}{8} c$, sein muss.

Fall II. Die kubische Hülfsgleichung hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Hier ist die reelle Wurzel, sie sei z_1, immer positiv. Denn die imaginären z_2 und z_3 müssen von der Form sein

$$M + Ni, \qquad M - Ni$$

und folglich ist $z_2 . z_3 = M^2 + N^2$ positiv; da nun $z_1 . z_2 . z_3 = \frac{1}{64} c^2$ sein muss, so muss auch z_1 positiv sein. Oder angenommen

$$\sqrt{z_2} = \pm (p + qi)$$

wird sein müssen $\sqrt{z_3} = \pm (p - qi)$

es ist folglich $\sqrt{z_2} . \sqrt{z_3} = \pm (p^2 + q^2)$ also reell; da nun $\sqrt{z_1} . \sqrt{z_2} . \sqrt{z_3} = \frac{1}{8} c$, also reell sein soll, so muss auch $\sqrt{z_1}$ reell, und z_1 positiv sein.

Wir behalten diese Ausdrücke $\pm (p + qi)$ und $\pm (p - qi)$ als Werthe von $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ bei, und unterscheiden die Fälle eines positiven und eines negativen c.

α) Ist c positiv, so ist zu setzen

$$x_1 = \sqrt{z_1} + (p+qi) + (p-qi) = \sqrt{z_1} + 2p, \quad x_3 = -\sqrt{z_1} + (p+qi) - (p-qi) = -\sqrt{z_1} + 2qi,$$
$$x_2 = \sqrt{z_1} - (p+qi) - (p-qi) = \sqrt{z_1} - 2p, \quad x_4 = -\sqrt{z_1} - (p+qi) + (p-qi) = -\sqrt{z_1} - 2qi.$$

β) Ist c negativ, so kommt

$$x_1 = -\sqrt{z_1} - (p+qi) - (p-qi) = -\sqrt{z_1} - 2p, \quad x_3 = \sqrt{z_1} - (p+qi) + (p-qi) = \sqrt{z_1} - 2qi,$$
$$x_2 = -\sqrt{z_1} + (p+qi) + (p-qi) = -\sqrt{z_1} + 2p, \quad x_4 = \sqrt{z_1} + (p+qi) - (p-qi) = \sqrt{z_1} - 2qi.$$

In diesem Falle II., wo die kubische Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat, sind also auch zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung imaginär.

Beispiel 1. Die Gleichung zu lösen $x^4 = 220 x^2 + 240 x - 8064$.

Die kubische Hülfsgleichung ist $z^3 - 110 z^2 + 1009 z - 900 = 0$.

Ihre Wurzeln $z_1 = 1, \quad z_2 = 9, \quad z_3 = 100,$

woher $\sqrt{z_1} = \pm 1, \quad \sqrt{z_2} = \pm 3, \quad \sqrt{z_3} = \pm 10.$

Wegen des positiven c ist

$$x_1 = 1 + 3 + 10 = 14, \qquad x_3 = -1 + 3 - 10 = -8,$$
$$x_2 = 1 - 3 - 10 = -12, \qquad x_4 = -1 - 3 + 10 = 6.$$

Beispiel 2. Die Gleichung zu lösen $x^4 = 220x^2 - 240x - 8064$, Diese Gleichung unterscheidet sich von der vorigen nur im Vorzeichen des c; die kubische Gleichung giebt die nämlichen Wurzeln 1, 9, 100, aber wegen des negativen c hat man

$$x_1 = -1 - 3 - 10 = -14, \qquad x_3 = 1 - 3 + 10 = 8,$$
$$x_2 = -1 + 3 + 10 = 12, \qquad x_4 = 1 + 3 - 10 = -6.$$

Alle Werthe von x sind denen im vorigen Beispiele entgegengesetzt. Eine gleiche Beziehung muss immer zwischen zwei biquadratischen Gleichungen der Form $x^4 = bx^2 + cx + d$ Statt finden, die sich nur durch entgegengesetzte Werthe des c unterscheiden; denn wird die Gleichung $x^4 = bx^2 + Cx + d$ durch $x = W$ richtig, so wird die $x^4 = bx^2 - Cx + d$ durch $x = -W$ gelöset werden.

Beispiel 3. Die Gleichung zu lösen $x^4 = -12x^2 + 48x - 160$.

Die Hülfsgleichung $z^3 + 6z^2 - 31z - 36 = 0$ hat die drei Wurzeln $z_1 = 4$, $z_2 = -9$, $z_3 = -1$, daher ist, mit Rücksicht darauf, dass c positiv,

$$x_1 = 2 + 3i - i = 2 + 2i, \qquad x_3 = -2 + 3i + i = -2 + 4i,$$
$$x_2 = 2 - 3i + i = 2 - 2i, \qquad x_4 = -2 - 3i - i = -2 - 4i.$$

Beispiel 4. Die Gleichung $x^4 = 14x^2 + 24x - 117$ zu lösen.

Die Hülfsgleichung $z^3 - 7z^2 - 17z - 9 = 0$ giebt $z_1 = 9$, $z_2 = -1$, $z_3 = -1$. Durch die Formeln unter I. B. α, wo $m = n = 1$, kommt

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -3 + 2i, \quad x_4 = -3 - 2i.$$

Beispiel 5. Die Gleichung $x^4 = 16x + 12$ zu lösen.

Die Hülfsgleichung $z^3 + 3z - 4 = 0$ giebt

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15}\,.\,i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{15}\,.\,i,$$

$$\sqrt{z_1} = \pm 1, \quad \sqrt{z_2} = \pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\,.\,i\right), \quad \sqrt{z_3} = \pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\,i\right).$$

Nach den Formeln von II. α. kommt

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}, \quad x_3 = -1 + \sqrt{5}\,.\,i, \quad x_4 = -1 - \sqrt{5}\,.\,i.$$

§. 9.

Neunte Aufgabe. Die biquadratische Gleichung

$$(1) \qquad x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

aufzulösen.

Auflösung. Man setze $\quad (2) \quad x = y - \frac{1}{4}A,$

so ist $x^4 = y^4 - Ay^3 + \frac{3}{8}A^2y^2 - \frac{1}{16}A^3y + \frac{1}{256}A^4$

$$Ax^3 = Ay^3 - \frac{3}{4}A^2y^2 + \frac{3}{16}A^3y - \frac{1}{64}A^4$$

$$Bx^2 = By^2 - \frac{1}{2}ABy + \frac{1}{16}A^2B$$

$$Cx = Cy - \frac{1}{4}AC$$

$$D = D$$

folglich durch Addition

$$y^4 - (\frac{3}{8}A^2 - B)y^2 - (-\frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C)y - (\frac{3}{256}A^4 - \frac{1}{16}A^2B + \frac{1}{4}AC - D) = 0$$

oder (3) $y^4 = (\frac{3}{8}A^2 - B)y^2 + (-\frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C)y + (\frac{3}{256}A^4 - \frac{1}{16}A^2B + \frac{1}{4}AC - D)$.

Die zur Auflösung dieser Gleichung dienende kubische Hülfsgleichung bekommt man, wenn man in Gl. (14) von §. 8. statt b, c, d nach der Reihe die Werthe setzt

$$\frac{3}{8}A^2 - B, \quad -\frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C, \quad \frac{3}{256}A^4 - \frac{1}{16}A^2B + \frac{1}{4}AC - D,$$

und sie ist

$$(4) \quad z^3 - \left(\frac{3}{16}A^2 - \frac{1}{2}B\right)z^2 + \left(\frac{3}{256}A^4 - \frac{1}{16}A^2B + \frac{1}{16}AC + \frac{1}{16}B^2 - \frac{1}{4}D\right)z$$
$$+ \left(-\frac{1}{4096}A^6 + \frac{1}{512}A^4B - \frac{1}{256}A^2B^2 - \frac{1}{256}A^3C + \frac{1}{64}ABC - \frac{1}{64}C^2\right) = 0.$$

Hat man vermittelst der drei Werthe von z nach dem im vorigen §. gezeigten Verfahren die vier Werthe von y hergeleitet, so findet man die vier Werthe von x, wenn man von jedem Werthe des y subtrahirt $\frac{1}{4}A$.

Die Bestimmung von z aus (4) möge hier nach den §§. 7. u. 5. weiter ausgeführt werden. Wenn man setzt

$$(5) \quad z = z' + \frac{1}{3}(\frac{3}{16}A^2 - \frac{1}{2}B) = z' + (\frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{6}B)$$

so wird, bei Substitution in (4) eine Gleichung der Form

$$(6) \quad z'^3 = b'z' + c',$$

hervorgehen, worin, den Formeln von §. 7. gemäss, b' und c' solchergestalt von A, B, C, D abhangen, dass

$$(7) \quad b' = \frac{1}{3}(\frac{3}{16}A^2 - \frac{1}{2}B)^2 - (\frac{3}{256}A^4 - \frac{1}{16}A^2B + \frac{1}{16}AC + \frac{1}{16}B^2 - \frac{1}{4}D)$$
$$= \frac{1}{48}B^2 - \frac{1}{16}AC + \frac{1}{4}D$$
$$= \frac{1}{48}(B^2 - 3AC + 12D).$$

$$(8)\quad c' = \frac{2}{27}\left(\frac{3}{16}A^2 - \frac{1}{2}B\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{16}A^2 - \frac{1}{2}B\right)\left(\frac{3}{256}A^4 - \frac{1}{16}A^2B + \frac{1}{16}AC + \frac{1}{16}B^2 - \frac{1}{4}D\right)$$

$$+ \frac{1}{4096}A^6 - \frac{1}{512}A^4B + \frac{1}{256}A^2B^2 + \frac{1}{256}A^3C - \frac{1}{64}ABC + \frac{1}{64}C^2$$

$$= \frac{1}{864}B^3 + \frac{1}{64}A^2D - \frac{1}{192}ABC - \frac{1}{24}BD + \frac{1}{64}C^2$$

$$= \frac{1}{192}\cdot[3C^2 + (3A^2 - 8B)D - ABC] + \frac{1}{864}B^3.$$

So lautet also die Vorschrift zur Auflösung der Gleichung (1):

1) Man löse die kubische Gleichung

$$z'^3 = (\frac{1}{48}B^2 - \frac{1}{16}AC + \frac{1}{4}D)z' + \frac{1}{192}[3C^2 + (3A^2 - 8B)D - ABC] + \frac{1}{864}B^3.$$

2) Zu jedem der drei Werthe von z' addire man $\frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{6}B$, und nenne die Summen z_1, z_2, z_3.

3) Hierauf bestimme man diejenigen vier in der Form $\pm\sqrt{z_1} \pm\sqrt{z_2} \pm\sqrt{z_3}$ enthaltenen Werthe, für welche das Product $\sqrt{z_1}\cdot\sqrt{z_2}\cdot\sqrt{z_3}$, wenn man jede dieser Wurzeln mit dem in jener Summe gewählten Vorzeichen nimmt, den Werth $\frac{1}{8}(-\frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C)$ erhält, — denn dieser Ausdruck entspricht dem Werthe von $\frac{1}{8}c$ in §. 8.

4) Endlich ziehe man von jedem dieser vier Werthe ab $\frac{1}{4}A$, so werden die vier Reste die Wurzeln der Gleichung (1) sein.

Diese Vorschrift gilt ganz allgemein, die Coefficienten A, B, C, D mögen lauter reelle Werthe, oder auch, alle oder zum Theil, imaginär sein. Sind sie aber und also auch die Coefficienten der Gleichung (3) reell, so kann man auch hier eine Unterscheidung verschiedener Fälle anstellen, wie im §. 8.; und, wie dort darauf Rücksicht zu nehmen war, ob c positiv oder negativ, so wird es hier mit darauf ankommen, ob $(-\frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C)$ positiv oder negativ. Führt man dieses alles im weiteren Detail durch, so wird man endlich eine Vorschrift hervorgehen sehen, welche mit der von Herrn Prof. Strehlke in Crelle's Journal B. 12. S. 356. aufgestellten, bei welcher nur reelle Coefficienten berücksichtigt sind, im Wesentlichen übereinstimmt. Es wird nicht nöthig sein, diese hier mitzutheilen, da die in diesem und dem vorigen §. gegebenen Vorschriften völlig zur Auflösung der Gleichung genügen.

Als ein Beispiel möge folgende Gleichung mit imaginären Coefficienten gelöset werden

$$x^4 - 8x^3 + 26x^2 - (56 + 12i)x + (64 + 48i) = 0.$$

1) Für die Hülfsgleichung $z'^3 = b'z' + c'$ findet sich

$$b' = \frac{25}{12} + 6i, \qquad c' = \frac{59}{54} + 4i.$$

Zur Auflösung dieser kubischen Gleichung hat man

$$u^3 + v^3 = c' = \frac{59}{54} + 4i, \qquad uv = \frac{b'}{3} = \frac{25}{36} + 2i,$$

woher

$$(u^3 + v^3)^2 = -\frac{43175}{2916} + \frac{236}{27}i,$$

$$4u^3v^3 = -\frac{373175}{11664} - \frac{1103}{54}i,$$

und

$$(v^3 - v^3)^2 = \frac{200475}{11664} + \frac{175}{6}i = 25.(\frac{11}{16} + \frac{7}{6}i).$$

Hieraus folgt

$$u^3 - v^3 = \frac{5\sqrt{3}}{3}.(\frac{7}{4} + i)$$

und

$$u^3 = (\frac{59}{108} + \frac{35\sqrt{3}}{24}) + (2 + \frac{5\sqrt{3}}{6})i = 3,072204 + 3,443376i,$$

$$v^3 = (\frac{59}{108} - \frac{35\sqrt{3}}{24}) + (2 - \frac{5\sqrt{3}}{6})i = -1,979611 + 0,556624i.$$

Bringt man den Werth von u^3 in die Form $f(\cos\varphi + \sin\varphi)i$ so kommt

$$\varphi = 48^0\,15'\,37'',6, \qquad \log f = 0,6641416,$$

und daraus entstehen für u die Werthe

$$u' = 1,599679 + 0,461325i,$$
$$u'' = -1,199359 + 1,154701i,$$
$$u''' = -0,400321 - 1,616025i.$$

Bei Umwandlung von v^3 in die Form $f'(\cos\varphi' + \sin\varphi' i)$ kommt

$$\varphi' = 164^0\,17'\,42'',56, \qquad \log f' = 0,3131029,$$

woraus sich für v die drei Werthe ergeben

$$v' = 0,733654 + 1,038675i,$$
$$v'' = -1,266346 + 0,116025i,$$
$$v''' = 0,532692 - 1,154700i.$$

Nach der Bedingung, dass $uv = \frac{25}{36} + 2i$ sein muss, gehört u' mit v', u'' mit v''', u''' mit v'' zusammen, und es hat z die drei Werthe

$$u' + v' = \frac{7}{3} + \frac{3}{2}i, \qquad u'' + v''' = -\frac{2}{3}, \qquad u''' + v'' = -\frac{5}{3} - \frac{3}{2}i.$$

2) Indem man zu diesen $\frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{6}B = -\frac{1}{3}$ addirt, werden die entsprechenden Werthe von z gefunden:

$$z_1 = 2 + \frac{3}{2}i, \qquad z_2 = -1, \qquad z_3 = -2 - \frac{3}{2}i.$$

3) Nun ist

$$\sqrt{z_1} = \pm\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right), \qquad \sqrt{z_2} = \pm i, \qquad \sqrt{z_3} = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right).$$

Die verschiedenen Werthe gehören so zusammen, dass

$$\sqrt{z_1}.\sqrt{z_2}.\sqrt{z_3} = \frac{1}{8}.\left(-\frac{1}{8}A^3 + \frac{1}{2}AB - C\right) = 2 + \frac{3}{2}i.$$

Hiernach kann man setzen

$$y_1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) + i + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) = 2,$$

$$y_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) = 1 + i,$$

$$y_3 = -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) + i - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -2 + 2i,$$

$$y_4 = -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -1 - 3i.$$

4) Aus diesen Werthen von y erhält man die von x, indem man von jedem $\frac{1}{4}A = -2$ subtrahirt; also ist:

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 3 + i, \qquad x_3 = 2i, \qquad x_4 = 1 - 3i.$$

Bei jeder Probe wird sich die Richtigkeit erweisen.

Anmerkung. Die in diesem Beispiele gefundenen Werthe von u und v können auch so ausgedrückt werden

$$u' = \left(\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i, \qquad v' = \left(\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i,$$

$$u'' = -\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}i, \qquad v'' = -\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,$$

$$u''' = -\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, \qquad v''' = -\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}i.$$

Es ist vielleicht nicht ganz der Mühe und des Raumes unwerth, noch kürzlich den Weg zu zeigen, wie sich dieses aus den Gleichungen

$$u' + v' = \frac{7}{3} + \frac{3}{2}i, \qquad u'' + v''' = -\frac{2}{3}, \qquad u''' + v'' = -\frac{5}{3} - \frac{3}{2}i$$

schliessen lässt.

Man setze $$u' = \alpha + \beta i,$$

so muss sein $$u'' = u' . (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i) = -\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\beta + (-\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha) i,$$

$$u''' = u' . (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i) = -\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\beta + (-\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha) i.$$

Eben so wird, wenn man annimmt

$$v' = \gamma + \delta i,$$

sein müssen $$v'' = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\delta + (-\tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma) i,$$

$$v''' = -\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\delta + (-\tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma) i.$$

Hieraus folgt weiter

$$u' + v' = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i,$$

$$u'' + v''' = -\frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\beta-\delta}{2}\sqrt{3} + (-\frac{\beta+\delta}{2} + \frac{\alpha-\gamma}{2}\sqrt{3}) i,$$

$$u''' + v'' = -\frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\beta-\delta}{2}\sqrt{3} + (-\frac{\beta+\delta}{2} - \frac{\alpha-\gamma}{2}\sqrt{3}) i.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den obigen Werthen von $u' + v'$, $u'' + v'''$, $u''' + v''$ führt zu den Gleichungen

$$\alpha + \gamma = \frac{7}{3}, \qquad \beta + \delta = \frac{3}{2},$$

$$\alpha - \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta - \delta = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Hieraus findet sich $$\alpha = \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \beta = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\gamma = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \delta = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

woraus sich die oben angegebenen Ausdrücke für u', u'', u''' und v', v'', v''' ergeben.

Gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

Nachricht

von

dem Zustande des städtischen Gymnasiums zu Danzig

während

des Schuljahres von Ostern 1835 bis 1836,

womit

zu der auf Dienstag, den 29. März 1836 angesetzten

öffentlichen Schulprüfung

ergebenst einladet

Dr. Friedr. Wilh. Engelhardt,

Director.

Danzig, 1836.

Gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

Schulnachrichten.

A. Lehrverfassung.

Die im vorigen Programme versprochene Uebersicht des Unterrichtsganges im Deutschen auf dem hiesigen Gymnasium gebe ich mit den Worten des Lehrers dieses Gegenstandes in Prima, des Herrn Professor Dr. Lehmann.

Hauptzüge des Lehrplans für den Unterricht im Deutschen auf dem Gymnasium zu Danzig.

Der mannigfache Einfluss, welchen der Stoff und die Einkleidung aller Unterrichtsgegenstände auf die Bildung im Deutschen ausüben, ist von solcher Bedeutsamkeit, dass man mit völligem Rechte behauptet, jeder Lehrer unterrichte in jeder Stunde fürs Deutsche. So wie im Allgemeinen eines jeden Lehrers Klarheit und Bestimmtheit im Denken und Auffassen, seine Gewandtheit im Sprechen und sein äusserer Vortrag, sein richtiges Urtheil und sein Geschmack, so wird auch der Stoff jedes Unterrichtszweiges an sich und dessen Behandlungsweise, namentlich die Grammatik der alten Sprachen und die mündliche und schriftliche Uebersetzung der alten Klassiker u. s. w. dem Lehrer des Deutschen theils vorarbeiten theils hülfreich stets zur Seite bleiben müssen, falls der Erfolg seines Wirkens vollkommen den Ansprüchen genügen soll, die eine gerechte Würdigung der Ausbildung in der Muttersprache macht. Doch von diesen allseitigen Bezügen, welche um so mehr als unerlässliche Bedingnisse anzusehn sind, da die dem Lehrer des Deutschen gegönnte Stundenanzahl eben in Rücksicht auf sie verhältnissmässig nicht bedeutend ist, sehen wir in unserm kurzen Umriss ab und sprechen bloss von denjenigen Stunden, welche ausschliesslich zum Unterricht in der Muttersprache bestimmt sind. Wir sondern demnach — für die Theorie gilt diese Sonderung, welche in der Praxis nicht selten wegfällt — die Zweige des Deutschen Unterrichtsganges auf folgende Weise.

§. 1.

Grammatik.

In den beiden untersten Klassen werden die Elemente der Etymologie durchgenommen, also zuvörderst die Lautlehre, dann die Wortlehre, vorzüglich Konjugation und Deklination; hiebei der einfache Satz mit den gewöhnlichsten Konstruktionsarten. Mannigfache, meistentheils mündliche, seltener schriftliche Uebungen lehren das Dargebotene oder Gefundene deutlich verstehn, bleibend einprägen und geläufig anwenden. Orthographie und besonders Interpunktion knüpfen sich hauptsächlich an Lectüre und schriftliche Arbeiten an. In Quarta und Untertertia ist ausser der synthetischen Durchführung des in den vorigen Klassen analytisch Durchgenommenen die Lehre von den Satzarten und ihrer Verbindung (hiebei die Interpunktion) Hauptgegenstand. In Obertertia wird das Wesen der Deutschen Periode in ihrem Mechanismus und Organismus (in steter Vergleichung mit Römischem und Griechischem Sprachgebrauch) tiefer und allseitiger begründet und hiebei eine systematische Uebersicht über das ganze Gebiet der Deutschen Sprachlehre dargeboten. Lehnt sich schon in Quarta und den beiden Tertias die Grammatik mehr oder weniger an Lectüre und Aufsätze, so erscheinen in Sekunda und Prima einzig und allein die Lectüre, die mündlichen Vorträge und die schriftlichen Uebungen als Anknüpfungspunkt der Grammatik; nur hin und wieder sind einzelne Stunden einer allgemein umfassenden Durchführung grammatischer Gegenstände gewidmet.

Götzingers Deutsche Sprachlehre (dritte Auflage, Aarau 1835) wird beim Lehrgang als Grundlage angesehn und den Schülern sämmtlicher Klassen zur Anschaffung und Benutzung empfohlen. Grimms Grammatik so wie Herlings und Beckers Werke dienen dem Lehrer noch ausserdem zur unabweisbaren Stütze.

Die Metrik beginnt ihren Hauptelementen nach in Untertertia, nachdem Deutsche und Lateinische Prosodik vorangegangen (Gottholds Hephästion haben die Schüler in Händen) und wird vervollständigt in Obertertia, wo die Uebungen im Deutschen, Lateinischen und Griechischen Versbau mit einander vereinigt besonders auf den Trimeter und vor Allem auf den Hexameter sich beziehn. In Sekunda und Prima werden regelmässig die praktischen Uebungen fortgesetzt und an sie eine gründlichere Darlegung der Theorie angeschlossen; in Sekunda erscheinen vorzugsweise das Distichon und die drei bekanntesten antiken Strophen (die Alcäische, Sapphische und Asklepiadeische), nebenbei auch die neueren Reimstrophen nebst kurzen Andeutungen über die Reimtheorie berücksichtigt, in Prima ausser ihnen auch andere Strophen nach Böckh und Voss behandelt.

§. 2.

Lectüre.

Statarische und kursorische Lectüre von prosaischen und poetischen Stücken geht in regelmässigen Stunden durch alle Klassen. Richtigkeit und Klarheit in der Aussprache, in der Betonung und der Pausirung (bei Gedichten noch der bestimmte, aber nicht grelle Vortrag des Rhythmus) verdienen überall wie in allen Stunden so bei der Lectüre die genaueste Aufmerk-

samkeit; Warnung vor fehlerhaftem Provinziellen darf nicht fehlen. Form und Inhalt, im Einzelnen wie im Ganzen, werden der Bildungsstufe gemäss aufgefasst, erläutert und erweitert. In den beiden Tertias knüpfen sich kurze Notizen aus der Literaturgeschichte des 18ten und 19ten Jahrhunderts beiläufig an. In Obertertia werden auch schon hin und wieder grössere klassische Stücke, namentlich Dramen, gelesen; die Beachtung des Ganzen als eines einheitlichen Kunstwerkes gehört erst nach Sekunda. Hier verfolgt die Lectüre einzelne Gattungen der Poesie und der Prosa durchs klassische Zeitalter, nachdem die Hauptpunkte der Poetik und Rhetorik vorausgeschickt worden, und arbeitet auf solche Weise dem Kursus in Prima vor, in welchem die Lectüre nur als Anschluss an die Geschichte der ganzen Deutschen Nationalliteratur angesehn, aber durch alle Epochen derselben durchgeführt wird und namentlich beim Nibelungenliede (mit grammatischen und lexikalischen Erörterungen), bei Luther, bei Klopstock und Lessing am Längsten verweilt.

Die Privatlectüre, vom Lehrer geordnet und geleitet, wird bis Untertertia noch sehr beschränkt; von Obertertia ab geht sie ihren regelmässigen Gang fort, wächst in den höheren Bildungsstufen an Masse und Vielseitigkeit und wird theils mittelbar bei Gelegenheit der Aufsätze, Vorträge u. s. w., theils unmittelbar in eigens dazu angesetzten Stunden einer genauen Kontrolle unterworfen.

Von Sexta bis Sekunda ist Lehmanns Deutsches Lesebuch (Danzig 1835) eingeführt und zwar Theil I. in Sexta und Quinta, Theil II. Abtheil. 1. u. 2. in Quarta und Untertertia, Theil II. Abtheil. 3. in Obertertia und Sekunda. Hülfsmittel für Erklärungen und Erörterungen finden sich namentlich in Götzingers Deutschen Dichtern, in Pölitz und Vetterleins Werken und anderen Kommentarien, von denen besonders Götzingers Werk so wie die Klopstockschen Oden von Vetterlein und von Gruber Schülern der oberen Klassen zur Benutzung anempfohlen werden.

§. 3.

Mündliche Vorträge.

Sie zerfallen in freie Vorträge und in Deklamationen. Die Uebungen in den ersteren, durch alle Klassen regelmässig angestellt, beginnen auf den beiden untersten Klassen mit Wiedererzählen des Gehörten und Gelesenen — augenblickliche Wiederholung wechselt mit häuslich vorbereiteter überall ab —, steigen darauf allmälig ins Gebiet eigener Zusammenstellung oder Erfindung, nach den einzelnen Bildungsstufen an Form und Inhalt gesteigert, und endigen sich endlich in der obersten Klasse mit eigenen Reden. Die Deklamationen schliessen sich zum Theil an jene Vorträge an, zum grösseren Theil aber beziehn sie sich auf Auswendiggelerntes, welches bald wörtlich bald nach eigener Auffassung und Umbildung des Schülers vorgetragen wird. Auf das Auswendiglernen klassischer Stücke der Prosa und ganz vorzüglich der Poesie wird von Sexta bis Sekunda besonderes Gewicht gelegt. Nur in Prima verknüpft sich die Deklamation allein mit dem Vortrage eigener Reden. Zu den Deklamationen und freien Vorträgen in den übrigen Klassen wird theils das in §. 2. erwähnte Lesebuch, theils anderweitig, besonders im

Griechischen und Lateinischen Gelesenes, theils in anderen Fächern Vorgetragenes oder Sonstiges benutzt. Die Wahl der Deklamationsstücke steht meistentheils den Schülern frei, wird aber zuvor erst dem Gutachten des Lehrers unterworfen, der eine spezielle und genaue Kontrolle darüber führt. Die Primaner gehn erst dann an das Ausarbeiten und das Auswendiglernen oder minder wörtliche Einprägen ihrer Reden, wenn der Lehrer zuvor das nach eigener Wahl des Schülers auserlesene Thema gebilligt und darauf die Disposition zur Begutachtung erhalten hat. Vielfache und vielseitige Erörterungen und Belehrungen, welche sich auf Inhalt und Form des vorgetragenen Gegenstandes so wie auf die Art und Weise des Vortragens beziehn, begleiten diese Uebungen oder folgen ihnen nach.

§. 4.

Schriftliche Uebungen.

Grammatik, Lectüre und mündliche Vorträge bilden nun eine Grundlage zu den schriftlichen Uebungen, welche ihrer Form nach aus prosaischen und metrischen Arbeiten, ihrer grösseren oder geringeren Vollständigkeit nach aus kleineren Aufsätzen, aus Dispositionen und Ausarbeitungen, endlich der Zeit und dem Orte nach aus häuslichen Arbeiten und Schulextemporalien bestehn.

In den beiden untersten Klassen können sich alle schriftliche Arbeiten ausser den grammatischen (s. §. 1.) natürlich bloss auf Wiedererzählung des Gehörten und Gelesenen beziehn, oder auf eigene kleine Erzählungen und Beschreibungen, oder auf kurze Beantwortung von Fragen, welche der Fassungskraft des Schülers angemessen sind. Auf eine deutliche und saubere Handschrift wird überall, zumal in den untersten Klassen ganz besonders geachtet. Auch in Quarta bleibt die Art und Weise der Aufgaben so ziemlich dieselbe, obwohl der Stoff schon verwickelter und der Umfang grösser wird. Gegen Ende des Kursus wird überall wie in allen Lehrfächern so auch bei den schriftlichen Arbeiten mit den vorgeschrittneren Schülern ein allmäliger Uebergang zum Lehrgange der folgenden Klasse vorbereitet und eingeleitet. In Untertertia beginnen eigentliche Ausarbeitungen, sobald über Anwendung, Eintheilung und Ausführung von Gedanken vielfache Erörterungen im Allgemeinen vorhergegangen und im Speziellen jeder einzelnen Aufgabe vorausgeschickt worden sind. Hier ist es auch schon Zeit, die prosaische und die poetische Darstellung genau zu sondern. In Obertertia bleibt jene spezielle Vorausschickung meistens weg, dagegen wird die allgemeine Erörterung systematisch und vollständig durchgeführt. Uebrigens muss von Untertertia ab bis Prima hinein jeder Ausarbeitung ihre Disposition vorgesetzt werden. Ausser den eigenen Ausarbeitungen, zu welchen in Obertertia wie in Sekunda und Prima meistens zwei bis drei Themata zur beliebigen Auswahl dargeboten werden, sind überdies in beiden Tertias Wiederholungen gelesener oder gehörter Gegenstände bald in ausgeführter Vollständigkeit bald in dispositionsartigen Umrissen als unerlässlich betrachtet, eben so Umarbeitungen von poetischen Stücken und andre Aufsätze, welche nicht sowohl die Erfindung als die Auffassung und Darstellung in Anspruch nehmen. In Sekunda und Prima werden schon grössere Abhandlungen über philosophische Gegenstände geliefert. Die Lehre vom Stil so wie die wichtigeren Kapitel aus der Rhetorik schliessen sich hier unmittelbar an. Nun steigert sich die Mannigfaltigkeit des Inhaltes zugleich und der Form. Hier kann auch die Deutsche Privatlectüre eine gebührende Kontrolle erfahren, und häufig wird es, besonders den Mitgliedern der Prima, zur

Pflicht gemacht, dieses und jenes Werk zu lesen, entweder um ähnlichen Stoff zu finden oder um Behandlungsweise und Form kennen zu lernen. Zu dem Zweck werden die Aufgaben schon sehr lange voraus mitgetheilt. Die Logik, welcher in Gemeinschaft mit der empirischen Psychologie eine besondere Stunde auf Prima gegönnt ist, findet auch hier in der praktischen Anwendung ihre Stellung, welche sie als Grundlage des Denkens einzunehmen hat. Und so bilden hier die Aufsätze eine Konzentrirung, in welcher einerseits die Kenntniss in der Grammatik und Literaturgeschichte, die Gründlichkeit in der Lectüre, die Uebung im mündlichen Vortrage sich vereinigen und andrerseits im Allgemeinen die Reife und Bildung so wie das innere Leben des Zöglings sich kund geben.

Die Schulextemporalien, welche, von den untersten Klassen ausgeschlossen, erst in den mittleren zuweilen und in den oberen öfters angeordnet werden, und die sich auf ein gegebenes Thema beziehn, haben zweierlei Zweck: einmal üben sie den Schüler, ohne alle Hülfsquellen zu zeigen, was er hat und was er kann, und geben ihm hiedurch Gelegenheit, schnell und gewandt seine Kenntnisse und seine geistigen Kräfte anzuwenden — eine Vorübung fürs künftige praktische Leben —, zweitens bieten sie dem Lehrer eine zuverlässige Grundlage zur Beurtheilung der Schüler dar.

Die metrischen Uebungen (vgl. §. 1.) beginnen auf Untertertia mit jambischen und trochäischen Versen, zuletzt mit dem Hexameter. Der Stoff, welcher in Verse zu kleiden ist, wird bald vom Lehrer gegeben, bald der Wahl des Schülers überlassen. Eigene Poesieen werden höchstens in Prima und auch da nur sehr selten und ausnahmsweise angenommen. In Obertertia ist der Trimeter und vorzüglich der Hexameter nebst dem Pentameter Hauptsache. Hier werden die Uebungen in freien Deutschen Versen mit der Restitution Lateinischer und Griechischer Verse verbunden. Auch in Sekunda bleibt noch der Hexameter Hauptaugenmerk, nebenbei fangen die drei bekanntesten antiken Strophen und hin und wieder auch gereimte Strophen der neueren Dichter an. Die Primaner setzen diese Uebungen, namentlich in jenen drei antiken Strophen, fort und bilden noch schwierigere Strophen nach. Aber auch hier nimmt der Versbau die vorzüglichste Berücksichtigung in Anspruch, nur bei Versuchen talentvoller Schüler kann das wahre poetische Element Veranlassung zu Erörterungen geben.

§. 5.

Literaturgeschichte.

In den beiden Tertias werden (s. §. 2.) gelegentlich und beiläufig literarische Notizen über ausgezeichnete Männer unsrer Literatur gegeben. In Sekunda führt der Lehrer einzelne Gattungen der Poesie und der Prosa des 18ten u. 19ten Jahrhunderts mit Anschluss der Lectüre durch, und erst in Prima fällt der vollständige Kursus des ganzen Gebietes der Nationalliteratur; bei dem 18ten u. 19ten Jahrhundert wird, was in Sekunda vorgetragen worden, als eine wichtige und nunmehr Zeit ersparende Vorarbeit angesehn. Ueber den Anschluss der Lectüre s. §. 2.

Kobersteins Leitfaden muss jeder Schüler in Sekunda und Prima zur Hand haben; die bemittelteren schaffen sich dessen Grundriss zur Geschichte der Deutschen Nationalliteratur an.

I. PRIMA.

Ordinarius: Der Director.

Latein. 10 St. Horaz Od. I. II. Epoden. Satir. I. 2 St. Der Director.. Cic. de finibus bon. et mal.; Terent. Andria und Heautontimorumenos. 3 St. Prof. Herbst. Tacit. Ann. IV. V. VI. XI. XII. 2 St. Grammat. und stylist. Uebung. 3 St. Prof. Pflugk.

Griechisch. 7 St. Platos Protagoras und de rep. IV. V. VIII. IX. (privatim Laches, Euthyphron, Menexenus). 3 St. Homeri Il. XIII—XVIII.; Herod. I—V. als Privatlectüre controllirt. 1 St. Grammat. u. stylistische Uebung. 1 St. Der Director. Sophoclis Antigona und Philoctetes. 2 St. Prof. Pflugk.

Deutsch. 3 St. Literaturgeschichte von Klopstock bis auf unsere Zeit. Lesung von Meisterwerken, namentlich Klopstocks, Lessings, Kants und Fichtes. Prosaische und metrische Uebungen. Mündliche Vorträge eigener Reden. — Logik. Prof. Lehmann.

Französisch. 2 St. Lectüre aus Idelers Lesebuche (J. J. Rousseau) Molieres Tartuffe, Corneilles le Cid, Cas. Delavignes Ecole des vieillards. Grammat. und stylist. Uebungen (Extemporalien und Exercitien in Verbindung mit Erkl. der synt. Regeln). Schulamtscand. Pflugk.

Hebräisch. 2 St. Repetition des regelmässigen und unregelmässigen Verbi, Lehre vom Nomen, Lesung einiger Stücke aus der Genesis und ausgewählter Psalmen. Dr. Hintz.

Religion. 1 St. Religionslehre aus dem Standpunkte der Philosophie und des Christenthums. Pastor Borkowski.

Mathematik. 4 St. Theorie der Transversalen, des Aehnlichkeitspunktes und dergl. Fortsetzung der ebenen Trigonometrie. Im Winter wurden 2 Stunden angewandt, um einer aus den am weitesten vorgerückten Schülern dieser Classe gebildeten Selecta die Theorie der Kettenbrüche, der höheren arithmetischen Progressionen, der Reihen für Exponentialgrössen, Logarithmen und Kreisfunktionen nebst einigen anderen Gegenständen vorzutragen. Von 14 zu 14 Tagen eine schriftliche Arbeit über mannichfaltige Aufgaben. Prof. Förstemann.

Physik. 2 St. Die Lehre vom Licht. Repetitionen über verschiedene Kapitel. Derselbe.

Geschichte. 3 St. Geschichte des 18ten Jahrhunderts. Repetition der griech. Gesch. bis zur Schlacht bei Ipsus; vierteljährlich ein historischer Aufsatz. Repetition der Geographie der aussereuropäischen Erdtheile. Dr. Hirsch.

II. SECUNDA.

Ordinarius: Professor Herbst.

Latein. 10 St. Cic. oratt. Catilin. pro lege Manilia, pro Milone, pro Dejotaro, pro Ligario, nebst Controlle der Privatlectüre (Cic. orator u. Brutus). 3 St. Grammatik u. Styl. 3 St. Virgil. Aen. lib. VII. — XI. 2 St. Prof. Herbst. Liv. lib. XXVII. XXVIII. 2 St. Prof. Pflugk.

Griechisch. 7 St. Homeri Il. I—VI. Herodot. lib. III. IV. V. Controlle der Privatlectüre (Hom. Odyss. I—VIII.) 4 St. Der Director. Xenoph. Memorabil. Socrat. vollst. 2 St. Griech. Syntax und schriftl. Uebung. 1 St. Prof. Pflugk.

Deutsch. 3 St. Lectüre und Erkl. ausgewählter Gedichte der lyrischen Dichter seit Haller mit Anknüpfung literarhist. Notizen. Declamat. Aufsätze, Disposit., metrische Arbeiten. Oberlehrer Röhl.

Französisch. 2 St. Lectüre aus Menzels Lesebuch, Abschnitte von de Pradt, Segur d. jüng., Mad. Stael, Las Casas, Chateaubriand. — Voltaires Henriade II. III. IV. Scribe's Diploma . Grammatik und Stylübungen. Schulamtscandidat Pflugk.

Hebräisch. 2 St. Von den Elementen bis zu den unregelmässigen Verben verb. mit Lesung leichterer Stücke aus der Genesis. Dr. Hintz.

Religion. 1 St. Im Sommer Lesung und Erklärung des Briefes Pauli an die Römer. Im Winter Hauptmomente aus der Geschichte der christl. Kirche. Pastor Borkowski.

Mathematik. 4 St. Flächeninhalt und Aehnlichkeit der Figuren. Logarithmen. Trigonometrie. Anfang der Stereometrie. Von 14 zu 14 Tagen eine schriftliche Arbeit über mannichfaltige Aufgaben. Prof. Förstemann.

Physik. 2 St. Chemie, Electricität, Magnetismus, Wärme. Derselbe.

Geschichte. 3 St. Mittlere Geschichte von 911 bis 1517. Repetition der römischen Geschichte, desgl. der Geographie von Afrika, Amerika, Australien. Dr. Hirsch.

III. OBER-TERTIA.

Ordinarius: Professor Lehmann.

Latein. 9 St. Grammatik und Styl. 4 St. Livius lib. XXI. 2 St. Prof. Herbst. Virgil. Aeneis I. II. 2 St. Metrische Uebung. 1 St. Prof. Lehmann.

Griechisch. 7 St. Xenoph. Anab. I. II. 2 St. Syntax, Exercit. u. Extemp. 2 St. Prof. Lehmann. Homeri Odyss. X–XIII. 2 St. Beendigung des etymol. Thl. der Grammatik. 1 St. Professor Pflugk.

Deutsch. 3 St. Prosaische Aufsätze und metrische Uebungen. Mündliche Vorträge, Grammatik, Lectüre. Professor Lehmann.

Französisch. 2 St. Telemaque 2 Bücher. Voltaires Henriade I—IV. Grammatik u. Stylübung, sowohl Extemporalien als häusliche Exercitien. Schulamtscand. Pflugk.

Religion. 2 St. Christliche Religionslehre nach Dräseke's Handbuch: Glaube, Liebe, Hoffnung. Pastor Borkowski.

Mathematik. 5 St. Arithmetik und Geometrie gleichzeitig. In der Arithmetik Repetitionen, Buchstabenrechnung, algebraische Gleichungen des ersten Grades nebst Proportionslehre; einiges von quadratischen Gleichungen. In der Geometrie Repetition der ersten Kapitel, Construction geometrischer Aufgaben, Flächeninhalt der gradlinigen Figuren. — Jede Woche eine schriftliche Arbeit, abwechselnd über geometrische und arithmetische Aufgaben. Prof. Förstemann.

Physik. 1 St. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Magnetismus, Electricität, Wärme. Derselbe.

Geschichte. 3 St. Geschichte des Alterthums. Uebersichtliche Repetition des ganzen Gebiets der Geschichte und der Geographie von Amerika, Afrika, Australien. Dr. Hirsch.

IV. UNTRR-TERTIA.

Ordinarius: Oberlehrer Röhl.

Latein, 8 St. Caesar de bello Gallico lib. V—VII. 3 St. Grammat. wöchentl. Exercitien und Extemporalien. 3 St. Ovids Metamorph. X—XII. 2 St. Oberl. Röhl. Im Sommer hatte den Ovid Prof. Pflugk.

Griechisch. 5 St. Grammatik: Repetition und Vervollständigung des Cursus von Quarta, nämlich von den Elementen bis zum Verb. baryt. incl.; dann verba liquid., contracta, Verba auf — μι, die kleinen Anomala und die bekanntesten und am häufigsten vorkommenden unregelmäss. Verba. Einzelnes aus der Syntax verb. mit kleinen wöchentl. Scriptis, daneben, so viel die Zeit erlaubte, Lectüre aus Jacobs, und einige hundert Verse aus den ersten beiden Büchern der Odyssee. Schulamtscand. Pflugk.

Deutsch. 3 St. Monatlich 1 Aufsatz, häufige Extemporalien; Declamation, Lectüre aus Lehmanns deutschem Lesebuche; Satzlehre; Elemente der Metrik. Oberlehrer Röhl.

Französisch. 2 St. Elemente der Sprache: Aussprache, Leseübungen, Declination, Pronomina, Adjectiva, regelmäss. und unregelmäss. Verba; schriftliche Uebungen nach Hirzels Grammatik. Lectüre aus Hirzels Grammatik und aus dem Telemaque. Schulamtscand. Pflugk.

Mathematik. 4 St. Vom Dreieck, Viereck und Kreise. Aus der Arithmetik Repetition des Pensums von Quarta, Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehr unbekannten Grössen, Buchsta' e rechnung. Oberlehrer Röhl.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer: Wiederholung der Mineralogie. Systematische Botanik. Im Winter: Systematische Zoologie. Oberlehrer Skusa.

Geschichte. 2 St. Mittlere und neuere Geschichte bis zum westphälischen Frieden; daneben Erlernung chronologischer Tabellen über das ganze Gebiet der Geschichte. Dr. Hirsch.

Geographie. 2 St. Asien, Amerika, Afrika. Dr. Hirsch.

Zeichnen. 2 St. Zeichenlehrer Breysig.

V. QUARTA.

Interimistischer Ordinarius: Schulamtscandidat Pflugk.

Latein. 8 St. Cornelius Nepos zum grösseren Theile durchgelesen, zuletzt auch ein Stück aus Caesar de bello gall. Repetition und Erweiterung der Formenlehre; Syntax des Nomen und andere Hauptregeln derselben, Extemporalien und wöchentliche Exercitien. Schulamtscand. Pflugk.

Griechisch. 5 St. Griechische Formenlehre von den ersten Elementen bis zum Verb. baryt. incl., daneben einige Lectüre aus Jacobs. Prof. Lehmann.

Deutsch. 3 St. Deutsche Aufsätze, Grammatik, besonders Interpunktion und Satzlehre, Declamation, Lectüre aus Lehmanns Lesebuche. Schulamtscand. Pflugk.

Religion. 2 St. Lesung und Erklärung ausgewählter Abschnitte aus dem Neuen Testament; im Winter daneben kurze Geschichte der Reformation. Schulamtscand. Pflugk.

Mathematik. 4 St. Positive und negative Zahlen; Potenzen, Primzahlen, Zerfällung der Zahlen, Decimalbrüche, Quadratwurzeln; Uebung der Rechnungsregeln des gemeinen Lebens. Oberlehrer Röhl.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer: Einfache Mineralien und die wichtigsten Gebirgsarten. Im Winter: Insecten und Conchylien. Oberlehrer Skusa.

Geschichte. 2 St. Alte und mittlere Geschichte bis Rudolph von Habsburg. Erlernen dazu gehöriger chronologischer Tabellen. Dr. Hirsch.

Geographie. 2 St. Geographie von Europa. Dr. Hirsch.

Zeichnen. 2 St. Zeichenlehrer Breysig.

VI. QUINTA.

Ordinarius: Dr. Hintz.

Latein. 9 St. Repetition des Pensums von Sexta, d. h. der regelmäss. Declinat. und Conjugation; unregelmäss. Declinat. und Conjugat. und das Hauptsächlichste aus dem noch übrigen Theile der Formenlehre oder Etymologie. Die wichtigsten Regeln der Syntax, besonders vom Deutschen abweichende Constructionen, wöchentl. Exercit., Lectüre aus Ellendt. 7 St. Dr. Hintz. Uebung der Formenlehre und Anfertigung kleiner latein. Sätze. 2 St. Oberlehrer Röhl.

Deutsch. 4 St. Betrachtung der Redetheile, vornehmlich des Hauptworts und Zeitworts nach ihrem Begriff, ihrer Bildung durch Ableitung und Zusammensetzung, ihrer Beugung und Rection Vom Satze. Deutsche Aufsätze. Declamation. Lectüre aus Lehmanns Lesebuche. Dr. Hintz.

Religion. 2 St. Bibl. Geschichte bis zum babyl. Exil, ausführlicher als in Sexta. Verheissung des Messias. — Leben, Leiden und Tod Jesu Christi. Gleichnissreden des Erlösers. Auswendiglernen erklärter Bibelsprüche aus dem A. u. N. T. Oberlehrer Skusa.

Rechnen. 4 St. Die 4 Species in Brüchen, einfache Regel de tri, zus. gesetzte Regel de tri, Kettenrechnung und Gesellschaftsrechnung, wobei immer auch das Kopfrechnen geübt wurde. Dr. Hintz.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer: Specielle Beschreibung einheimischer Pflanzen, wobei frische Exemplare benutzt wurden. — Im Winter: Einzelne Arten in- und ausländischer Säugethiere u. Vögel. Oberl. Skusa.

Geschichte. 2 St. Die alte und mittlere Geschichte nach ihren Hauptmomenten erzählt, von den Schülern nacherzählt und nach einer Tabelle häufig repetirt. Dr. Hintz.

Geographie. 3 St. Der Cursus von Sexta wurde wiederholt und dann allgemeine physische Geographie in construirender Methode gelehrt. Dr. Hirsch.

Zeichnen. 2 St. Zeichenlehrer Breysig.

Schreiben. 2 St. Elementarlehrer Waage.

VII. SEXTA.

Ordinarius: Oberlehrer Skusa.

Latein. 8 St. Einübung der regelmässigen Declination und Conjugation mit Einschluss der Präpositionen, Deponentia, Genusregeln. Uebersetzen aus Ellendt. Mündliches Bilden leichter Sätze zur Einübung der Formen und ersten syntaktischen Regeln; wöchentlich 1 kleines Exercitium. Oberlehrer Skusa.

Deutsch. 4 St. Leseübungen in Lehmanns Lesebuche, verbunden mit mündl. Erzählen des Gelesenen. Declamation leichter Gedichte. Kenntniss der Redetheile und der Bildung des einfachen Satzes. Orthographische Uebungen. Correctur kleiner Aufsätze. Oberlehrer Skusa.

Religion. 2 St. Einzelne Abschnitte aus der bibl. Geschichte bis Salomo. Erzählungen aus dem Leben Jesu. Auswendiglernen leichter Bibelsprüche und Liederverse. Oberlehrer Skusa.

Rechnen. 4 St. Die 4 Species in unbenannten und benannten Zahlen, schriftlich und im Kopfe; zuletzt die Anfänge der Bruchrechnung. Dr. Hintz.

Naturgeschichte. 2 St. Aufsuchen äusserer Kennzeichen an einheimischen Pflanzen und Thieren. Oberlehrer Skusa.

Geschichte. 1 St. Erzählungen von berühmten Männern des Alterthums. Oberlehrer Skusa.

Geographie. 3 St. Allgemeine Uebersicht der Land- und Wasservertheilung auf der Erde, in construirender Methode gelehrt. Dr. Hirsch.

Zeichnen. 2 St. Zeichenlehrer Breysig.

Schreiben. 4 St. Elementarlehrer Waage.

Ausser dem in dem Vorstehenden angegebenen Unterrichte wurde von dem Musiklehrer Boyd in 8 wöch. St. 4 verschiedenen Abthl. Gesangunterricht ertheilt. Seit Neujahr 1836 erhalten auch die Schüler catholischen Bekenntnisses besonderen catholischen Religionsunterricht, der Mittwochs und Sonnabends Nachmittags von 3—4 Uhr von dem hiesigen Domherrn Rossolkiewicz ertheilt wird.

B. Verordnungen
des Königl. Hochlöblichen Schul-Collegiums der Provinz Preussen.

1. Vom 29. April 1835. Einladung des Directors zur Theilnahme an einer den 9. 10. 11. Juli zu Königsberg zu haltenden Directoren-Conferenz.

2. Vom 20. März, 26. Juni, 25. September 1835. Genehmigung der Einführung des deutschen Lesebuchs vom Prof. Dr. Lehmann von VI. bis II.

3. Vom 26. October 1835. Mittheilung der Anforderungen, die bei der Versetzung von Secunda nach Prima an einen Schüler gemacht werden sollen.

4. Vom 13. Januar 1836. Hinweisung auf des Prof. Peter Schmidt neue Schrift: Plan, wie Peter Schmidts Zeichen-Methode in allen Schulen mit Erfolg und fast ohne Umstände einzuführen ist, zur Kenntnissnahme des Zeichenlehrers.

5. Vom 26. Februar 1836. Mittheilung der Verordnung E. Königl. Hohen Ministeriums der Geistlichen &c. Angelegenheiten, dass in den Abiturienten-Zeugnissen durch Hinweisung auf No. 28. der Gesetzsammlung vom Jahr 1835 die Artikel 1. 2. 4. des Bundesbeschlusses vom 14. November 1834 in Erinnerung gebracht werden sollen; desgl. Anzeige des gesetzlichen Anfanges der Vorlesungen bei den verschiedenen preuss. Universitäten zur Mittheilung an die jedesmaligen Abiturienten.

C. Chronik.

Die Verwaltung der durch den Tod des Oberlehrers Dirlam am 9. November 1834 eröffneten Lehrerstelle hat nach erfolgter Ascension der Herrn Hirsch u. Röhl in dem nun verflossenen Schuljahre E. Hochedler Rath mit Genehmigung Eines Königl. Hochlöblichen Schul-Collegiums dem Schulamtscandidaten Pflugk d. J., der an dem hiesigen Gymnasium sein gesetzliches Probejahr abhielt, besonders mit Rücksicht auf den Unterricht in der französischen Sprache, von der Herr Pflugk ausser seinen sonstigen sehr schätzbaren philologischen und historischen Kenntnissen eine vorzüglich genaue und gründliche Kenntniss hat, geneigtest übertragen, über die definitive Besetzung derselben aber die Entscheidung sich noch vorbehalten, worüber ich im nächsten Programme das Weitere mittheilen werde.

Das mündliche Abiturienten-Examen hielt der Herr Geheime Regierungsrath Jachmann am 22. u. 23. März.

D. Statistische Nachrichten.

a. Schüler.

Die Gesammtzahl der Schüler am Schlusse des vorigen Schuljahres nach Abzug der Abiturienten und der beim Druck der Nachrichten bereits Abgegangenen betrug 294, nachher verliessen das Gymnasium noch 12, so dass 281 blieben. Im Laufe des Sommers stieg die Zahl auf 313, zu Anfang des Winters auf 307; jetzt sind nach Abzug der Abiturienten und der zu anderweitigen Bestimmungen bereits Abgegangenen 278, nämlich in I. 15, in II. 21, in O.III. 44, in U.III. 50, in IV. 61, in V. 44, in VI. 43.

Zur Universität werden jetzt folgende 7 entlassen.

1. Michael Alexander Keller, aus Danzig, 21 Jahr alt, 10½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima. Er wird in Königsberg Theologie studiren.
2. Ernst Gustav Zaddach, aus Danzig, 18½ Jahr alt, 10½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Mathematik und Naturwissenschaft studiren.
3. Carl Theodor Schneider, aus Danzig, 20½ Jahr alt, 11 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima. Er wird in Halle Theologie studiren.
4. Friedrich Wichert, aus Danzig (geb. zu Dirschau), 21 Jahr alt, 10½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Theologie und Philologie studiren.
5. Friedrich Eduard Rothe, aus Danzig, 23 Jahr alt, 7½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima. Er wird in Königsberg Theologie studiren.
6. George Sigismund Eduard Krieger, aus Danzig, 19 Jahr alt, 7 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Medicin studiren.
7. Karlomann Wilhelm Johann Mauwe, aus Danzig (geb. zu Potsdam), 21 Jahr alt, 10 Jahr auf dem Gymnasium, 1½ Jahr in Prima. Er wird in Berlin Jura studiren.

Sie erhielten sämmtlich das Zeugniss der Reife.

b. Lehrapparat.

Ausser den Fortsetzungen von: Corpus script. hist. Byzant. Suidae Lexicon. Herodot. v. Baehr, Thucyd. v. Poppo, Cic. Opp. v. Orelli, Graffs althochdeutschem Sprachschatz, Encyclop. v. Ersch u. Gruber. Gesch. der europ. Staaten v. Heeren u. Uckert, Raumers Gesch. Europas, Ludens deutscher Geschichte. Pertz Monumenta german. Drumann's Gesch. Roms, Joh. v. Müller's sämmtl. Werken, Hegels Werken, Gehlers physikal. Wörterbuch, Goldfuss naturhist. Atlas, wurden neu angeschafft: Eichhorns deutsche Staatsgeschichte, Schuberts Handbuch der Staatenkunde, Mendelsohns germanisches Europa, Droysens Gesch. Alexanders d. Gr., Heinels Gesch. Preussens, Berghaus Cabinets-Bibliothek, Wolfs consilia scholastica, Jacobs vermischte Schriften u. m. and.

Als Geschenke von Seiten

Eines Hohen Königlichen Ministerii

erhielten wir ausser den Fortsetzungen von Crelle's Journal für Mathematik, dem encyclopäd. Wörterbuche der medic. Wissensch. Ledebur's Archiv für die Geschichtskunde des Preuss. Staates, Kuglers Museum: Freytagii lexicon arab. lat. t. I—III., Berndt's allgem. Schriftenkunde der gesammten Wappenwissensch. 3r Thl. Gloger's Handbuch der Naturgeschichte der Vögel Europa's, 1r Thl.,

für welche Beweise Hohen Wohlwollens wir gehorsamst danken.

c. Unterstützungen der Schüler.

Aus den von uns verwalteten Fonds theilten wir Unterstützungen an Schüler aus 370 Thaler.

Freien Unterricht erhielten 43 Schüler.

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre von Ostern 1835 bis dahin 1836.

Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	Classen und Stunden. I.	II.	O. III.	U. III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Lateinisch	10	10	9	8	8	9	8	62
Griechisch	7	7	7	5	5	—	—	31
Deutsch	3	3	3	3	3	4	4	23
Französisch	2	2	2	2	—	—	—	8
Hebräisch	2	2	—	—	—	—	—	4
Religion	1	1	2	2	2	2	2	12
Mathematik	4	4	5	4	4	4	4	29
Physik	2	2	1	—	—	—	—	5
Geschichte	3	3	3	2	2	2	1	16
Geographie	—	—	—	2	2	3	3	10
Naturgeschichte	—	—	—	2	2	2	2	8
Zeichnen	2∾2		2	2	2	2	2	12
Schreiben	—	—	—	—	—	2	4	6
Gesang	2∾2∾2			2	2	2∾2		8
Summa	38	38	36	34	32	32	32	234

Verhältnisse der

Schüler

In	waren	wurden aufgenommen als translocirte, oder neue.	entlassen in eine andere Classe, oder von der Anstalt.	sind
I.	14	10	9	15
II.	28	10	17	21
O III	31	30	17	44
U III	54	36	40	50
IV.	58	53	50	61
V.	68	29	53	44
VI.	41	27	25	43
S.	294	195	211	278

Abiturienten.

Es sind entlassen		studiren wo?		was?	
mit dem Zeugn. d. Reife	7	in Berlin.	4	Theologie...	3
		in Königsberg	2	Theologie u. Philol....	1
		in Halle	1	Jura..........	1
				Medicin......	1
				Mathem. u. Naturwiss.	1
	7		7		7

Von diesen Stunden fallen die Hebräischen, die Zeichenstunden für die 3 oberen Classen, und die Singestunden mit Ausnahme von zweien für die Discantisten und Altisten der beiden untersten Classen, ausser der Schulzeit.

Das Zeichen ∾ deutet Combination an.

Inscribirt sind im verflossenen Schuljahre 51; aus der Anstalt ausgeschieden seit dem Schluss des vorigen Programms bis jetzt 67.

Anordnung der Prüfung am 29. März 1836.

Vormittags von 8 Uhr ab.
Chor von der ersten Singeclasse gesungen.

UNTER-TERTIA.	Griechisch. Schulamtscandidat Pflugk.
	Mathematik. Oberlehrer Röhl.
OBER-TERTIA.	Latein (Livius) Professor Herbst.
	Griechisch (Homer). Professor Pflugk.
SECUNDA.	Religion. Pastor Borkowski.
	Mathematik. Professor Förstemann.
PRIMA.	Französisch. Schulamtscandidat Pflugk.
	Geschichte. Dr. Hirsch.
	Latein (Cicero). Prof. Herbst.

Entlassung der Abiturienten.
Schlussgesang.

Nachmittags von 3 Uhr ab.
Chor von der ersten Singeclasse gesungen.

SEXTA.	Biblische Geschichte. Oberlehrer Skusa.
	Latein. Oberlehrer Skusa.
QUINTA.	Geschichte. Dr. Hintz.
	Naturgeschichte. Oberlehrer Skusa.
QUARTA.	Geographie. Dr. Hirsch.
	Latein. Schulamtscandidat Pflugk.

Schlussgesang.

Den 30. März wird die Censur und Translocation gehalten, u: mit diesem Tage der Wintercursus geschlossen. Der neue beginnt mit dem 14. April. Zur Prüfung und Aufnahme neuer Schüler bin ich nach Ostern jeden Vormittag von 9—12 Uhr in meiner Wohnung (Langemarkt 453.) anzutreffen. Engelhardt, Director.

Text zu den bei der Prüfung vorzutragenden Gesängen.

Vormittags.
Chor von B. A. Weber.

Ehre sei dem Vater und dem Sohne und dem heiligen Geiste, der da war von Anfang, der da ist und der da sein wird von Ewigkeit zu Ewigkeit. Amen.

Schlussgesang. Vormittags.
Magnificat von Durante.

Nachmittags.
Psalm 46. Motette von Kirnberger.

Gott ist unsre Zuversicht und Stärke, eine Hülfe in den grossen Nöthen, die uns troffen haben. Darum fürchten wir uns nicht, wenn gleich die Welt unterginge, und die Berge mitten ins Meer sänken.

Schlussgesang.
Chor mit Soli aus der Schöpfung von Haydn.

Von deiner Güt', o Herr, ist Erd' und Himmel voll, die Welt so gross, so wunderbar, ist deiner Hände Werk. — Gesegnet sei des Herrn Macht, sein Lob erschall' in Ewigkeit. — Der Sterne Hellstern, o wie schön verkündest du den Tag, wie schmückst du ihn, o Sonne, du des Weltalls Seel' und Aug'. — Macht kund auf eurer weiten Bahn des Herren Macht und seinen Ruhm. — Und du der Nächte Zierd' und Trost und all das strahlend Heer, verbreitet überall sein Lob und euren Chorgesang. — Ihr Elemente, deren Licht stets neue Formen zeugt, ihr Dunst und Nebel, die der Wind versammelt und zerstreut, lobsinget alle Gott dem Herrn. Gross, wie sein Nam', ist seine Macht. — Sanft rauschend lobt, o Quellen ihr, den Wipfel neigt ihr Bäum', ihr Pflanzen duftet, Blumen haucht ihm euren Wohlgeruch. — Ihr, deren Pfad die Höh' erklimmt, und ihr, die niedrig kriecht, ihr deren Flug die Luft durchschneidt, und ihr im tiefen Nass, ihr Thiere, preiset alle Gott. Ihn lobe, was nur Odem hat. — Ihr dunklen Hain', ihr Berg' und Thal, ihr Zeugen unseres Danks, ertönen sollt ihr früh und spat von unserm Lobgesang. — Heil dir, o Gott, o Schöpfer, Heil. Aus deinem Wort entstand die Welt. Dich beten Erd' und Himmel an, wir preisen dich in Ewigkeit.